Exponentialfunktionen bestimmen (Lösungsvorschläge)

Exponentialfunktionen aus gegebenen Punkten

- Gesucht sind die jeweiligen Exponentialfunktionen, deren Schaubilder durch die angegebenen Punkte verlaufen.

a) Setze P_1 und P_2 in f ein und löse nach b auf

$$\begin{aligned} a+b &= -1 && \big|-a \\ b &= -1-a \end{aligned}$$

setze in $a\mathrm{e}^1+b = 0$ ein

$$\begin{aligned} a\mathrm{e}+b &= 0 \\ a\mathrm{e}+(-1-a) &= 0 \\ a\mathrm{e}-1-a &= 0 && \big|+1 \\ a\mathrm{e}-a &= 1 && \big|a \text{ ausklammern} \\ a(\mathrm{e}-1) &= 1 && \big|\div(\mathrm{e}-1) \\ a &= \frac{1}{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

setze in $b = -1-a$ ein

$$\begin{aligned} b &= -1-\frac{1}{\mathrm{e}-1} \\ &= \frac{-(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}-1}-\frac{1}{\mathrm{e}-1} \\ &= \frac{-\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}-\frac{1}{\mathrm{e}-1} \\ &= \frac{-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &\approx 0{,}582 \\ b &\approx -1{,}582 \\ f(x) &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^x+\frac{-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

b) Setze P_1 und P_2 in f ein und löse nach b auf

$$\begin{aligned} a+b &= -1 && \big|-a \\ b &= -1-a \end{aligned}$$

setze in $a\mathrm{e}^1+b = 0$ ein

$$\begin{aligned} a\mathrm{e}+b &= 0 \\ a\mathrm{e}+(-1-a) &= 0 \\ a\mathrm{e}-1-a &= 0 && \big|+1 \\ a\mathrm{e}-a &= 1 && \big|a \text{ ausklammern} \\ a(\mathrm{e}-1) &= 1 && \big|\div(\mathrm{e}-1) \\ a &= \frac{1}{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

setze in $b = -1-a$ ein

$$\begin{aligned} b &= -1-\frac{1}{\mathrm{e}-1} \\ &= \frac{-(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}-1}-\frac{1}{\mathrm{e}-1} \\ &= \frac{-\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}-\frac{1}{\mathrm{e}-1} \\ &= \frac{-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &\approx 0{,}582 \\ b &\approx -1{,}582 \\ f(x) &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^x+\frac{-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

c) Setze P_1 und P_2 in f ein und löse nach b auf

$$a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\cdot 0}+b = 3$$
$$a+b = 3 \qquad \left|-a\right.$$
$$b = 3-a$$

setze in $a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\cdot -3}+b = 0$ ein

$$a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\cdot -3}+b = 0$$
$$a\,\mathrm{e}+b = 0$$
$$a\,\mathrm{e}+3-a = 0 \qquad \left|-3\right.$$
$$a\,\mathrm{e}-a = -3 \qquad \left|a \text{ ausklammern}\right.$$
$$a(\mathrm{e}-1) = -3 \qquad \left|\div(\mathrm{e}-1)\right.$$
$$a = -\frac{3}{\mathrm{e}-1}$$

setze in $b = 3-a$ ein

$$b = 3-\left(-\frac{3}{\mathrm{e}-1}\right)$$
$$= 3+\frac{3}{\mathrm{e}-1}$$
$$= \frac{3(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}-1}+\frac{3}{\mathrm{e}-1}$$
$$= \frac{3\,\mathrm{e}-3}{\mathrm{e}-1}+\frac{3}{\mathrm{e}-1}$$
$$= \frac{3\,\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

$a \approx -1{,}7459$

$b \approx 4{,}7459$

$$f(x) = -\frac{3}{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+\frac{3\,\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

d) Setze P_1 und P_2 in f ein und löse nach b auf

$$a\,\mathrm{e}^{-2\cdot(-3)}+b = 3$$
$$a\,\mathrm{e}^{6}+b = 3 \qquad \left|-a\,\mathrm{e}^{6}\right.$$
$$b = 3-a\,\mathrm{e}^{6}$$

setze in $a\,\mathrm{e}^{-2\cdot(-4)}+b = -\frac{1}{2}$ ein

$$a\,\mathrm{e}^{-2\cdot(-4)}+b = -\frac{1}{2}$$
$$a\,\mathrm{e}^{8}+b = -\frac{1}{2}$$
$$a\,\mathrm{e}^{8}+3-a\,\mathrm{e}^{6} = -\frac{1}{2} \qquad \left|-3\right.$$
$$a\,\mathrm{e}^{8}-a\,\mathrm{e}^{6} = -\frac{7}{2} \qquad \left|a \text{ ausklammern}\right.$$
$$a\left(\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}\right) = -\frac{7}{2} \qquad \left|\div\left(\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}\right)\right.$$
$$a = -\frac{\frac{7}{2}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}$$

setze in $b = 3-a\,\mathrm{e}^{6}$ ein

$$b = 3-\left(-\frac{\frac{7}{2}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}\mathrm{e}^{6}\right)$$
$$= 3+\frac{\frac{7}{2}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}\mathrm{e}^{6}$$
$$= \frac{3\left(\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}\right)}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}+\frac{\frac{7}{2}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}\mathrm{e}^{6}$$
$$= \frac{3\,\mathrm{e}^{8}-3\,\mathrm{e}^{6}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}+\frac{\frac{7}{2}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}\mathrm{e}^{6}$$
$$= \frac{3\,\mathrm{e}^{8}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{6}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}$$

$a \approx -0{,}0014$

$b \approx 3{,}5478$

$$f(x) = -\frac{\frac{7}{2}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{3\,\mathrm{e}^{8}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{6}}{\mathrm{e}^{8}-\mathrm{e}^{6}}$$

Beweis

Das Schaubild der Funktion $f(x) = a\,e^{kx}+b$ verläuft durch die Punkte $P_1\left(x_1 \mid y_1\right)$ und $P_2\left(x_2 \mid y_2\right)$. Zeigen Sie, dass $a=\dfrac{y_1-y_2}{e^{kx_1}-e^{kx_2}}$ und $b=\dfrac{y_2\,e^{kx_1}-y_1\,e^{kx_2}}{e^{kx_1}-e^{kx_2}}$ ist.

Stelle das LGS auf:

$$\begin{array}{lccl} (1) & y_1 & = & a\,e^{kx_1}+b \\ (2) & y_2 & = & a\,e^{kx_2}+b \end{array}$$

Löse das LGS mit dem Additionsverfahren

$$\begin{array}{rcrcrl} y_1 & = & a\,e^{kx_1} & + & b & \\ y_2 & = & a\,e^{kx_2} & + & b & \left|\cdot(-1)\right. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcr} y_1 & = & a\,e^{kx_1} & + & b \\ -y_2 & = & -a\,e^{kx_2} & - & b \end{array}\right] +$$

$$\begin{array}{rcll} y_1-y_2 & = & a\,e^{kx_1}-a\,e^{kx_2} & \\ y_1-y_2 & = & a\left(e^{kx_1}-e^{kx_2}\right) & \left|\div\left(e^{kx_1}-e^{kx_2}\right)\right. \\ \dfrac{y_1-y_2}{e^{kx_1}-e^{kx_2}} & = & a & \end{array}$$

$a=\dfrac{y_1-y_2}{e^{kx_1}-e^{kx_2}}$ in die Gleichung $y_1 = a\,e^{kx_1}+b$ einsetzen:

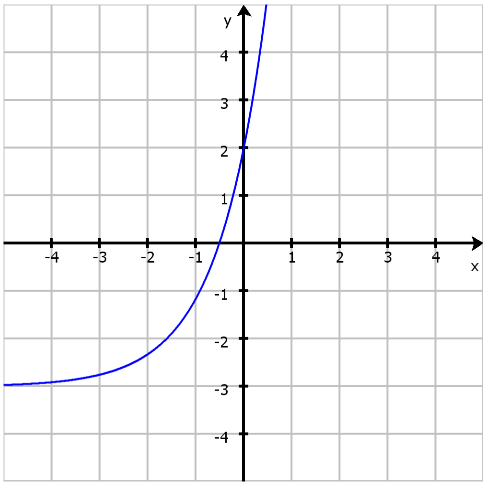
$$\begin{array}{rcll} y_1 & = & \dfrac{y_1-y_2}{e^{kx_1}-e^{kx_2}}\cdot e^{kx_1}+b & \\ y_1 & = & \dfrac{y_1\cdot e^{kx_1}-y_2\cdot e^{kx_1}}{e^{kx_1}-e^{kx_2}}+b & \left|-\dfrac{y_1\cdot e^{kx_1}-y_2\cdot e^{kx_1}}{e^{kx_1}-e^{kx_2}}\right. \\ y_1-\dfrac{y_1\cdot e^{kx_1}-y_2\cdot e^{kx_1}}{e^{kx_1}-e^{kx_2}} & = & b & \\ \dfrac{y_1\left(e^{kx_1}-e^{kx_2}\right)}{e^{kx_1}-e^{kx_2}}-\dfrac{y_1\cdot e^{kx_1}-y_2\cdot e^{kx_1}}{e^{kx_1}-e^{kx_2}} & = & b & \\ \dfrac{y_1\,e^{kx_1}-y_1\,e^{kx_2}-y_1\cdot e^{kx_1}+y_2\cdot e^{kx_1}}{e^{kx_1}-e^{kx_2}} & = & b & \\ \dfrac{y_2\,e^{kx_1}-y_1\,e^{kx_2}}{e^{kx_1}-e^{kx_2}} & = & b & \end{array}$$

Schaubilder

a) $y=-1$ ist waagerechte Asymptote $\Rightarrow$ $b=-1$

$(0 \mid 2)$ ist ein Kurvenpunkt $\Rightarrow$ $2=a\cdot e^{0}-1$ $\Rightarrow$ $a=3$

$f(x) = 3e^{x}-1$



b) Begründung: Asymptote von $f(x)$ ist $x=-3$.