Exponentialgleichungen (Lösungen)

Exponentialgleichungen 1

- Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen exakt und geben Sie die entsprechenden Lösungsmengen an.

a)
$$\begin{aligned} e^{3x}-2 &= 0 && \mid +2 \\ e^{3x} &= 2 && \mid \ln \\ 3x &= \ln(2) && \mid \div 3 \\ x &= \frac{\ln(2)}{3} \\ x &\approx 0.231 \end{aligned}$$

$$L = \left\{\frac{\ln(2)}{3}\right\} \quad (=\{0.231\})$$

b)
$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2} &= 0 && \mid -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}x} &= -\frac{3}{2} && \mid \div\left(-\frac{1}{3}\right) \\ e^{\frac{1}{2}x} &= \frac{9}{2} && \mid \ln \\ \frac{1}{2}x &= \ln\left(\frac{9}{2}\right) && \mid \div\frac{1}{2} \\ x &= 2\cdot\ln\left(\frac{9}{2}\right) \\ x &\approx 3.0082 \end{aligned}$$

$$L = \left\{2\cdot\ln\left(\frac{9}{2}\right)\right\} \quad (=\{3.0082\})$$

c)
$$\begin{aligned} -4e^{4x}-\frac{1}{2} &= 0 && \mid +\frac{1}{2} \\ -4e^{4x} &= \frac{1}{2} && \mid \div(-4) \\ e^{4x} &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ hat keine Lösung

$$L = \{\}$$

d)
$$\begin{aligned} -5e^{3x}+4 &= 1 && \mid -4 \\ -5e^{3x} &= -3 && \mid \div(-5) \\ e^{3x} &= \frac{3}{5} && \mid \ln \\ 3x &= \ln\left(\frac{3}{5}\right) && \mid \div 3 \\ x &= \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{3} \\ x &\approx -0.1703 \end{aligned}$$

$$L = \left\{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{3}\right\} \quad (=\{-0.1703\})$$

e)
$$\begin{aligned} 2e^{-\frac{9}{2}x}-3 &= e^{-\frac{9}{2}x} && \mid -e^{-\frac{9}{2}x} \\ e^{-\frac{9}{2}x}-3 &= 0 && \mid +3 \\ e^{-\frac{9}{2}x} &= 3 && \mid \ln \\ -\frac{9}{2}x &= \ln(3) && \mid \div\left(-\frac{9}{2}\right) \\ x &= -\frac{2\cdot\ln(3)}{9} \\ x &\approx -0.2441 \end{aligned}$$

$$L = \left\{-\frac{2\cdot\ln(3)}{9}\right\} \quad (=\{-0.2441\})$$

f)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{5}{3} &= -\frac{14}{3}e^{-x} && \Big|\ +\frac{14}{3}e^{-x}\\
5e^{-x}-\frac{5}{3} &= 0 && \Big|\ +\frac{5}{3}\\
5e^{-x} &= \frac{5}{3} && \Big|\ \div 5\\
e^{-x} &= \frac{1}{3} && \Big|\ \ln\\
-x &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) && \Big|\div(-1)\\
x &= \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-1}\\
x &\approx 1.0986
\end{aligned}
$$

$$L = \left\{\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-1}\right\} \quad (=\{1.0986\})$$

g)

$$
\begin{aligned}
-4e^{\frac{9}{4}x}+4 &= \frac{5}{2} && \Big|\ -4\\
-4e^{\frac{9}{4}x} &= -\frac{3}{2} && \Big|\ \div(-4)\\
e^{\frac{9}{4}x} &= \frac{3}{8} && \Big|\ \ln\\
\frac{9}{4}x &= \ln\left(\frac{3}{8}\right) && \Big|\div\frac{9}{4}\\
x &= \frac{4\cdot\ln\left(\frac{3}{8}\right)}{9}\\
x &\approx -0.4359
\end{aligned}
$$

$$L = \left\{\frac{4\cdot\ln\left(\frac{3}{8}\right)}{9}\right\} \quad (=\{-0.4359\})$$

h)

$$
\begin{aligned}
-4e^{2x-4}+\frac{1}{2} &= 0 && \Big|\ -\frac{1}{2}\\
-4e^{2x-4} &= -\frac{1}{2} && \Big|\ \div(-4)\\
e^{2x-4} &= \frac{1}{8} && \Big|\ \ln\\
2x-4 &= \ln\left(\frac{1}{8}\right) && \Big|+4\\
2x &= \ln\left(\frac{1}{8}\right)+4 && \Big|\div 2\\
x &= \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)+4}{2}\\
x &\approx 0.9603
\end{aligned}
$$

$$L = \left\{\frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)+4}{2}\right\} \quad (=\{0.9603\})$$

i)

$$
\begin{aligned}
-\frac{29}{4}e^{-\frac{1}{2}x+2}+4 &= -4e^{-\frac{1}{2}x+2} && \Big|\ +4e^{-\frac{1}{2}x+2}\\
-\frac{13}{4}e^{-\frac{1}{2}x+2}+4 &= 0 && \Big|\ -4\\
-\frac{13}{4}e^{-\frac{1}{2}x+2} &= -4 && \Big|\ \div\left(-\frac{13}{4}\right)\\
e^{-\frac{1}{2}x+2} &= \frac{16}{13} && \Big|\ \ln\\
-\frac{1}{2}x+2 &= \ln\left(\frac{16}{13}\right) && \Big|-2\\
-\frac{1}{2}x &= \ln\left(\frac{16}{13}\right)-2 && \Big|\div\left(-\frac{1}{2}\right)\\
x &= -2\cdot\ln\left(\frac{16}{13}\right)+4\\
x &\approx 3.5847
\end{aligned}
$$

$$L = \left\{-2\cdot\ln\left(\frac{16}{13}\right)+4\right\} \quad (=\{3.5847\})$$

j) Löse nach x auf:

$$x^7 e^x - 2x^2 e^x = 0 \quad \Big| \ e^x \text{ ausklammern}$$
$$e^x\left(x^7 - 2x^2\right) = 0$$
$e^x > 0$ für alle x $\Rightarrow$ $x^7 - 2x^2 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$x^7 - 2x^2 = 0 \quad \Big| \ x^2 \text{ ausklammern}$$
$$x^2\left(x^5 - 2\right) = 0$$
$x^2 = 0$ oder $x^5 - 2 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$x^2 = 0 \quad \Big| \ \sqrt{}$$
$$x_{1,2} = 0$$

$$x^5 - 2 = 0 \quad \Big| \ +2$$
$$x^5 = 2 \quad \Big| \ \sqrt[5]{}$$
$$x_3 = \sqrt[5]{2}$$
$$x_3 \approx 1.1487$$

$L = \left\{\sqrt[5]{2}, 0\right\}$

k) Löse nach x auf:

$$\frac{9}{2}x^6 e^x + \frac{3}{2}x^4 e^x = 0 \quad | \ e^x \text{ ausklammern}$$

$$e^x\left(\frac{9}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4\right) = 0$$

$e^x > 0$ für alle x $\Rightarrow$ $\frac{9}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$\frac{9}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 = 0 \quad | \ x^4 \text{ ausklammern}$$

$$x^4\left(\frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$x^4 = 0$ oder $\frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2} = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$\begin{aligned} x^4 &= 0 \quad | \ \sqrt[4]{} \\ x_{1,2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2} &= 0 \quad \left| \ -\frac{3}{2} \right. \\ \frac{9}{2}x^2 &= -\frac{3}{2} \quad \left| \ \div\frac{9}{2} \right. \\ x^2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

hat keine Lösung

$L = \{0\}$

l) In Nullform bringen:

$$\begin{aligned} 2x^6 e^{x-2} + 4x^6 &= 4x^6 e^{x-2} && \mid -4x^6 e^{x-2} \\ -2x^6 e^{x-2} + 4x^6 &= 0 \end{aligned}$$

Löse nach x auf:

$$\begin{aligned} 2x^6 e^{x-2} + 4x^6 &= 0 && \mid x^6 \text{ ausklammern} \\ x^6\left(-2e^{x-2} + 4\right) &= 0 \end{aligned}$$

$x^6 = 0$ oder $-2e^{x-2} + 4 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$\begin{aligned} x^6 &= 0 && \mid \sqrt[6]{} \\ x_{1,2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2e^{x-2} + 4 &= 0 && \mid -4 \\ -2e^{x-2} &= -4 && \mid \div(-2) \\ e^{x-2} &= 2 && \mid \ln \\ x - 2 &= \ln(2) && \mid +2 \\ x &= \ln(2) + 2 \\ x &\approx 2.6931 \end{aligned}$$

$x_3 = \ln(2) + 2$

$$L = \{0, \ln(2) + 2\}$$

m) In Nullform bringen:

$$-\frac{1}{3}x^6 e^{2x+\frac{13}{3}} + 2x^3 e^{2x+\frac{13}{3}} = 4x^6 e^{2x+\frac{13}{3}} \quad \Big|\ -4x^6 e^{2x+\frac{13}{3}}$$

$$-\frac{13}{3}x^6 e^{2x+\frac{13}{3}} + 2x^3 e^{2x+\frac{13}{3}} = 0$$

Löse nach x auf:

$$-\frac{1}{3}x^6 e^{2x+\frac{13}{3}} + 2x^3 e^{2x+\frac{13}{3}} = 0 \quad \Big|\ e^{2x+\frac{13}{3}} \text{ ausklammern}$$

$$e^{2x+\frac{13}{3}}\left(-\frac{13}{3}x^6 + 2x^3\right) = 0$$

$e^{2x+\frac{13}{3}} > 0$ für alle $x \Rightarrow -\frac{13}{3}x^6 + 2x^3 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$-\frac{13}{3}x^6 + 2x^3 = 0 \quad \Big|\ x^3 \text{ ausklammern}$$

$$x^3\left(-\frac{13}{3}x^3 + 2\right) = 0$$

$x^3 = 0$ oder $-\frac{13}{3}x^3 + 2 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$\begin{aligned} x^3 &= 0 \quad \Big|\ \sqrt[3]{} \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{13}{3}x^3 + 2 &= 0 && \Big|\ -2 \\ -\frac{13}{3}x^3 &= -2 && \Big|\ \div\left(-\frac{13}{3}\right) \\ x^3 &= \frac{6}{13} && \Big|\ \sqrt[3]{} \\ x_2 &= \sqrt[3]{\frac{6}{13}} \\ x_2 &\approx 0.7728 \end{aligned}$$

$$L = \left\{\sqrt[3]{\frac{6}{13}},\ 0\right\}$$

Exponentialgleichungen 2

a)

$$
\begin{aligned}
-\frac{5}{4}e^{-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}+5 &= 0 && \Big| -5\\
-\frac{5}{4}e^{-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}} &= -5 && \Big| \div\left(-\frac{5}{4}\right)\\
e^{-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}} &= 4 && \Big| \ln\\
-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4} &= \ln(4) && \Big| +\frac{1}{4}\\
-\frac{3}{2}x &= \ln(4)+\frac{1}{4} && \Big| \div\left(-\frac{3}{2}\right)\\
x &= -\frac{2\cdot\ln(4)+\frac{1}{2}}{3}\\
x &\approx -1.0909
\end{aligned}
$$

b) Löse nach x auf:

$$
\begin{aligned}
\frac{13}{3}x^4e^{-\frac{15}{4}x-\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}xe^{-\frac{15}{4}x-\frac{5}{2}} &= 0 && \Big|\ e^{-\frac{15}{4}x-\frac{5}{2}}\ \text{ausklammern}\\
e^{-\frac{15}{4}x-\frac{5}{2}}\left(\frac{13}{3}x^4-\frac{2}{3}x\right) &= 0
\end{aligned}
$$

$e^{-\frac{15}{4}x-\frac{5}{2}}>0$ für alle x $\Rightarrow$ $\frac{13}{3}x^4-\frac{2}{3}x=0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$
\begin{aligned}
\frac{13}{3}x^4-\frac{2}{3}x &= 0 && \Big|\ x\ \text{ausklammern}\\
x\left(\frac{13}{3}x^3-\frac{2}{3}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

$x=0$ oder $\frac{13}{3}x^3-\frac{2}{3}=0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$x_1 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{13}{3}x^3-\frac{2}{3} &= 0 && \Big| +\frac{2}{3}\\
\frac{13}{3}x^3 &= \frac{2}{3} && \Big| \div\frac{13}{3}\\
x^3 &= \frac{2}{13} && \Big| \sqrt[3]{\ }\\
x_2 &= \sqrt[3]{\frac{2}{13}}\\
x_2 &\approx 0.5358
\end{aligned}
$$

Die Gleichung besitzt die Lösung $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{13}}$. Damit ist gezeigt, dass die Gleichung genau zwei Lösungen für x besitzt.

c) In Nullform bringen:

$$x^6 e^{-3x-\frac{5}{3}} - \frac{5}{2}x^2 e^{-3x-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{2}x^2 e^{-3x-\frac{5}{3}} \quad \Big| +\frac{3}{2}x^2 e^{-3x-\frac{5}{3}}$$

$$x^6 e^{-3x-\frac{5}{3}} - x^2 e^{-3x-\frac{5}{3}} = 0$$

Löse nach x auf:

$$x^6 e^{-3x-\frac{5}{3}} - \frac{5}{2}x^2 e^{-3x-\frac{5}{3}} = 0 \quad \Big| \; e^{-3x-\frac{5}{3}} \text{ ausklammern}$$

$$e^{-3x-\frac{5}{3}}\left(x^6 - x^2\right) = 0$$

$e^{-3x-\frac{5}{3}} > 0$ für alle $x \Rightarrow x^6 - x^2 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$x^6 - x^2 = 0 \quad \Big| \; x^2 \text{ ausklammern}$$

$$x^2\left(x^4 - 1\right) = 0$$

$x^2 = 0$ oder $x^4 - 1 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$x^2 = 0 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = 0$$

$$x^4 - 1 = 0 \quad \Big| +1$$

$$x^4 = 1 \quad \Big| \sqrt[4]{}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt[4]{1}$$

$$x_{3,4} = \pm 1.0$$

$$\Rightarrow L = \{-1, 0, 1\}$$

