Verkettung von Funktionen

$v(z)$, $z \in \mathbb{R}$ und $v(x)$, $x \in \mathbb{R}$ sind zwei Funktionen, dann ist $v(u(x))$ die Verkettung von u und v.

Beispiel: $v(z)=\sin(z) \land u(x)=2x \Rightarrow v(u(x))=\sin(2x)$

Bestimmen Sie den Funktionsterm von $f(x)=v(u(x))$:

1. $v(z)=\cos(z) \land u(x)=x^3+2$
2. $v(z)=\mathrm{e}^z \land u(x)=\frac{1}{x}$
3. $v(z)=z^2 \land u(x)=x^2-3$
4. $v(z)=\frac{1}{z} \land u(x)=-x+5$

Zerlegen Sie folgende verkette Funktionsterme in alle möglichen Einzelbestandteile.

Beispiel:

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x+1}=v(u(x)) \Rightarrow \begin{cases} v(z)=\mathrm{e}^z \land u(x)=2x+1 \\ \text{oder} \\ v(z)=\mathrm{e}^{z+1} \land u(x)=2x \\ \text{oder} \\ v(z)=\mathrm{e}^{2z+1} \land u(x)=x \end{cases}$$

1. $f(x)=\sin(\frac{2}{3}x-5)$
2. $f(x)=(\cos(x))^3$
3. $f(x)=3\,\mathrm{e}^{-x}$
4. $f(x)=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}$

Lösungen:

Teil 1:

1. $v(z)=\cos(z) \;\wedge\; u(x)=x^3+2 \;\Rightarrow\; f(x)=\cos(x^3+2)$
2. $v(z)=\mathrm{e}^z \;\wedge\; u(x)=\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
3. $v(z)=z^2 \;\wedge\; u(x)=x^2-3 \;\Rightarrow\; f(x)=(x^2-3)^2$
4. $v(z)=\frac{1}{z} \;\wedge\; u(x)=-x+5 \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{-x+5}$

Teil 2:

1. $f(x)=\sin(\frac{2}{3}x-5)=v(u(x)) \;\Rightarrow\; \begin{cases} v(z)=\sin(z) \;\wedge\; u(x)=\frac{2}{3}x-5 \\ \text{oder} \\ v(z)=\sin(\frac{2}{3}z-5) \;\wedge\; u(x)=x \end{cases}$
2. $f(x)=(\cos(x))^3=v(u(x)) \;\Rightarrow\; \begin{cases} v(z)=z^3 \;\wedge\; u(x)=\cos(x) \\ \text{oder} \\ v(z)=(\cos(z))^3 \;\wedge\; u(x)=x \end{cases}$
3. $f(x)=3\mathrm{e}^{-x}=v(u(x)) \;\Rightarrow\; \begin{cases} v(z)=3\mathrm{e}^z \;\wedge\; u(x)=-x \\ \text{oder} \\ v(z)=3z \;\wedge\; u(x)=\mathrm{e}^{-x} \\ \text{oder} \\ v(z)=3\mathrm{e}^{-z} \;\wedge\; u(x)=\mathrm{x} \end{cases}$
4. $f(x)=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}=v(u(x)) \;\Rightarrow\; \begin{cases} v(z)=\sqrt[3]{z} \;\wedge\; u(x)=\mathrm{e}^x \\ \text{oder} \\ v(z)=\sqrt[3]{\mathrm{e}^z} \;\wedge\; u(x)=x \end{cases}$