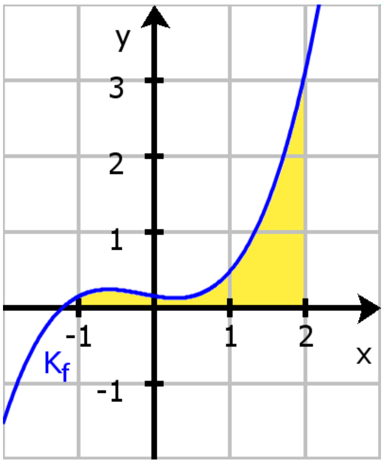
Flächenberechnung (Lösungen)

Sei K_f der Graph der Funktion f mit

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\ ;\quad x\in\mathbb{R}$$

Bestimmen Sie den exakten Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve K_f, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=-1$ und $x=2$ eingeschlossen wird.

Lösung:

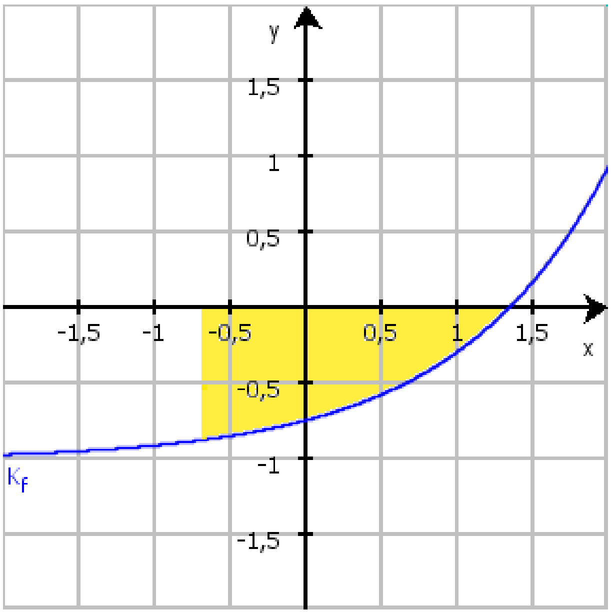


$$A=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}x\right]_{-1}^{2}$$
$$=2\,\text{FE}$$

a) K_f ist der Graph der Funktion f mit $f(x)=e^{x-\frac{4}{3}}-1$

Bestimmen Sie den exakten Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve K_f, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x=-\frac{2}{3}$ eingeschlossen wird.

Lösung:



Nullstellen berechnen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
e^{x-\frac{4}{3}}-1 &= 0 \qquad |+1 \\
e^{x-\frac{4}{3}} &= 1 \qquad |\ln \\
x-\frac{4}{3} &= \ln(1) \qquad \left|+\frac{4}{3}\right. \\
x &= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

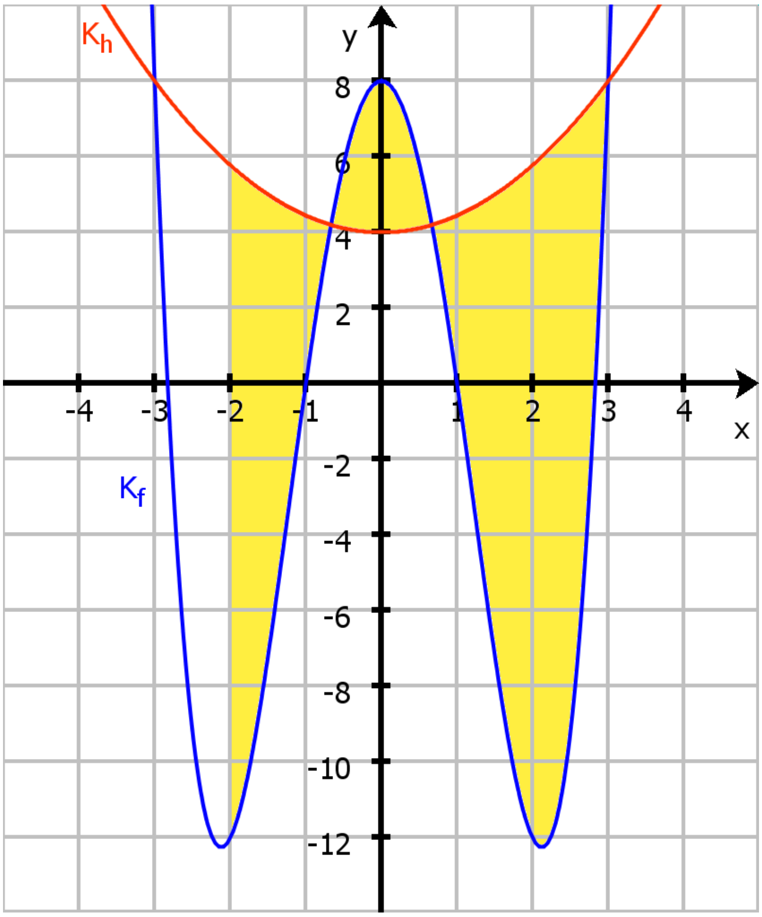
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{4}{3}}^{-\frac{2}{3}} \left(e^{x-\frac{4}{3}}-1\right) dx \\
&= \left[e^{x-\frac{4}{3}}-x\right]_{\frac{4}{3}}^{-\frac{2}{3}} \\
&= e^{-2}+\frac{2}{3}-\left(e^{0}-\frac{4}{3}\right) \\
&= e^{-2}+1\text{FE}
\end{aligned}
$$

b) K_f ist der Graph der Funktion f mit $f(x)=x^4-9x^2+8$ und

K_h ist der Graph der Funktion h mit $h(x)=\frac{4}{9}x^2+4$.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den Kurven K_f , K_h und den Geraden mit den Gleichungen $x=-2$ und $x=3$ eingeschlossen wird.

Lösung:



Schnittpunkte von K_f und K_h berechnen:

$$\begin{aligned}
x^4-\frac{85}{9}x^2+4 &= \frac{4}{9}x^2+4 && \mid \cdot 9\\
9x^4-81x^2+72 &= 4x^2+36 && \mid -4x^2-36\\
9x^4-85x^2+36 &= 0 && \mid \text{Substitution: } x^2 \rightarrow u\\
9u^2-85u+36 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a=9,\ b=-85,\ c=36$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{85\pm\sqrt{(-85)^2-4\cdot 9\cdot 36}}{2\cdot 9}\\
&= \frac{85\pm\sqrt{7225-1296}}{18}\\
&= \frac{85\pm\sqrt{5929}}{18}\\
&= \frac{85\pm 77}{18}\\
u_1 &= 9\\
u_2 &= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Rücksubstitution: $u \rightarrow x^2$

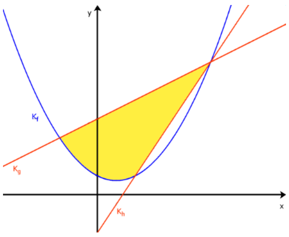
$$\begin{aligned}
u_1 \rightarrow \quad x^2 &= 9 && \mid \sqrt{\ }\\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{9}\\
x_{1,2} &= \pm 3\\
x_1 &= 3\\
x_2 &= -3\\
u_2 \rightarrow \quad x^2 &= \frac{4}{9} && \mid \sqrt{\ }\\
x_{3,4} &= \pm\sqrt{\frac{4}{9}}\\
x_{3,4} &= \pm\frac{2}{3}\\
x_3 &= \frac{2}{3}\\
x_4 &= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$A=\int_{-\frac{2}{3}}^{-2}\left(-x^4+\frac{85}{9}x^2-4\right)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{-\frac{2}{3}}\left(-x^4+\frac{85}{9}x^2-4\right)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{3}\left(-x^4+\frac{85}{9}x^2-4\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{85}{27}x^3-4x\right]_{-\frac{2}{3}}^{-2}+\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{85}{27}x^3-4x\right]_{\frac{2}{3}}^{-\frac{2}{3}}+\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{85}{27}x^3-4x\right]_{\frac{2}{3}}^{3}$$

$$\approx 12{,}5454+3{,}5204+26{,}1602\approx 42{,}226\,\text{FE}$$

Berechnen Sie den exakten Flächeninhalt der markierten Fläche:

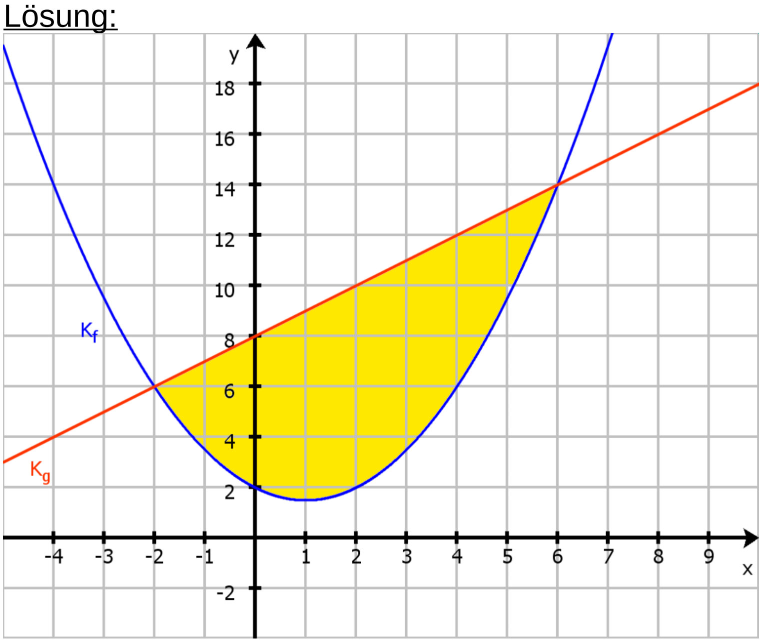


$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+2$$

$$g(x)=x+8$$

$$h(x)=3x-4$$

Lösung:



Berechnung der Schnittstellen von K_f und K_g: $x=-2 \lor x=6$

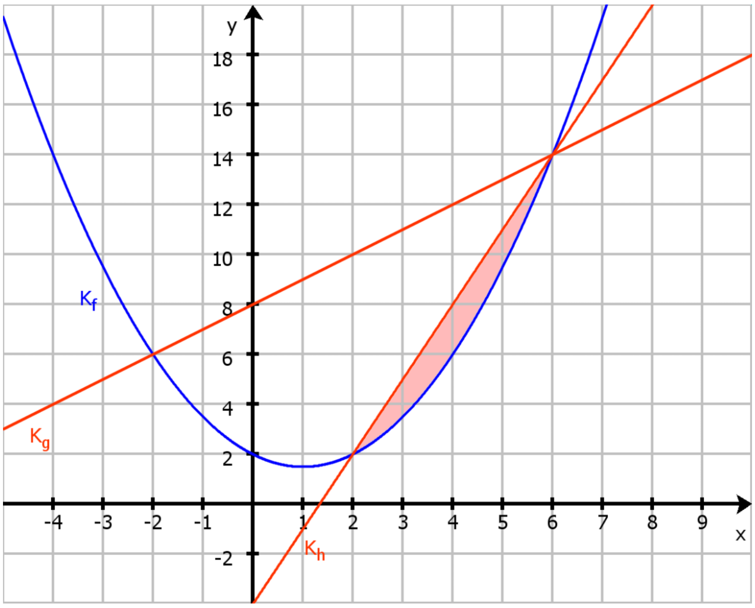
Berechnung des Flächeninhalts zwischen K_f und K_g:

$$A_1=\int_{-2}^{6}\left(x+8-\left(\frac{1}{2}x^2-x+2\right)\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{6}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x+6\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+x^2+6x\right]_{-2}^{6}$$

$$=\frac{128}{3}\,\text{FE}$$



Berechnung der Schnittstellen von K_f und K_h: $x=2 \lor x=6$

Berechnung des Flächeninhalts zwischen K_f und K_h:

$$A_2=\int_2^6 \left(3x-4-\left(\frac{1}{2}x^2-x+2\right)\right)dx$$
$$=\int_2^6 \left(-\frac{1}{2}x^2+4x-6\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+2x^2-6x\right]_2^6$$
$$=\frac{16}{3}\text{FE}$$

Berechnung des gesuchten Flächeninhalts: $A=A_1-A_2=\frac{128}{3}-\frac{16}{3}=\frac{112}{3}\text{FE}$