Lösungen zu Aufgaben (Wendepunkte)

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion f mit

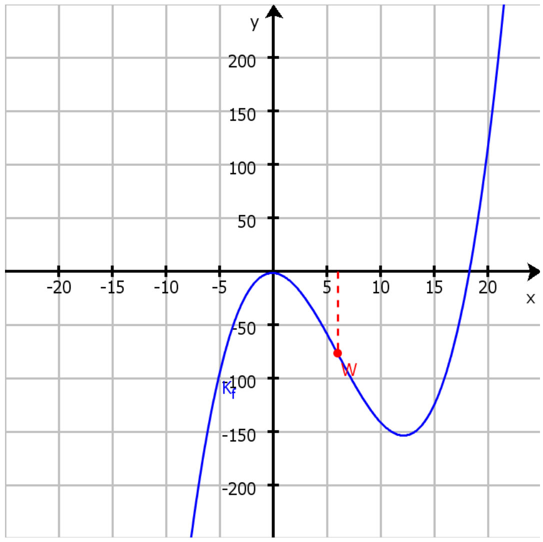
$$f(x)=\frac{1}{6}x^3-3x^2-\frac{2}{3}x-1$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

Lösung:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{6}x^3-3x^2-\frac{2}{3}x-1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^2-6x-\frac{2}{3} \\ f''(x) &= x-6 \\ f'''(x) &= 1 \end{aligned}$$



Berechne die Nullstellen der 2. Ableitung:
Setze $f''(x)=0$:

$$\begin{aligned} x-6 &= 0 \quad \vert +6 \\ x &= 6 \\ x_1 &= 6 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x=6$:

$f'''(6) = 1$

$f'''(6)\neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle an der Stelle $x=6$

$f(6)=-77 \Rightarrow W(6 \mid -77)$

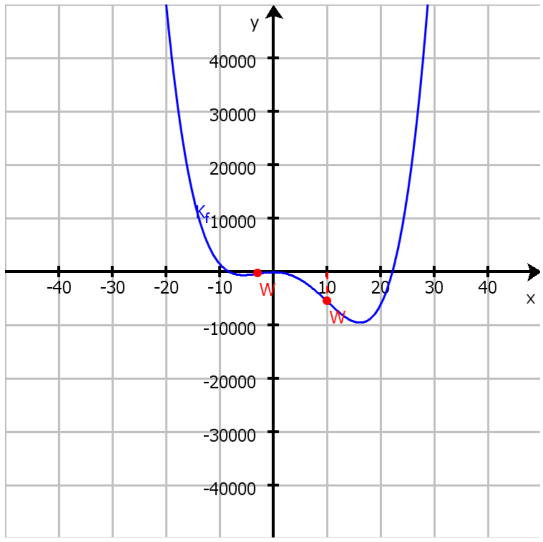
b) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}25x^4 - 3{,}5x^3 - 45x^2 + x + 1$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

Lösung:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:



$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}25x^4 - 3{,}5x^3 - 45x^2 + x + 1 \\ f'(x) &= x^3 - 10{,}5x^2 - 90x + 1 \\ f''(x) &= 3x^2 - 21x - 90 \\ f'''(x) &= 6x - 21 \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 2. Ableitung:
Setze $f''(x) = 0$:
setze $a = 3,\ b = -21,\ c = -90$
in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-90)}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{21 \pm \sqrt{441 + 1080}}{6} \\ &= \frac{21 \pm \sqrt{1521}}{6} \\ &= \frac{21 \pm 39}{6} \\ x_1 &= 10 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = 10$:

$f'''(10) = 39$

$f'''(10) \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle an der Stelle $x = 10$

$f(10) = -5489 \Rightarrow W(10 \mid -5489)$

Untersuche die Stelle $x = -3$:

$f'''(-3) = -39$

$f'''(-3) \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle an der Stelle $x = -3$

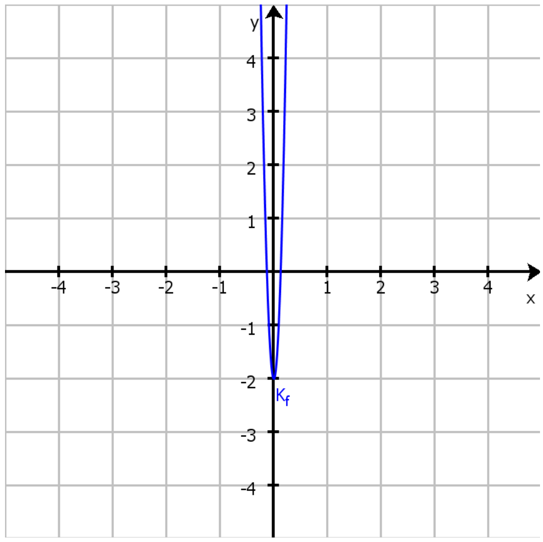
$f(-3) = -292{,}25 \Rightarrow W(-3 \mid -292{,}25)$

c) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}25x^4 + 9x^3 + 121{,}5x^2 - x - 2$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

Lösung:



Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}25x^4 + 9x^3 + 121{,}5x^2 - x - 2 \\ f'(x) &= x^3 + 27x^2 + 243x - 1 \\ f''(x) &= 3x^2 + 54x + 243 \\ f'''(x) &= 6x + 54 \\ f''''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 2. Ableitung:
Setze $f''(x) = 0$:
setze $a = 3,\ b = 54,\ c = 243$
in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-54 \pm \sqrt{(54)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 243}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{-54 \pm \sqrt{2916 - 2916}}{6} \\ &= \frac{-54 \pm \sqrt{0}}{6} \\ &= \frac{-54 \pm 0}{6} \\ x_1 &= -9 \\ x_2 &= -9 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = -9$:

$$\begin{aligned} f'''(-9) &= 0 \\ f''''(-9) &= 6 \end{aligned}$$

$f''''(-9) \neq 0 \Rightarrow$ keine Wendestelle bei $x = -9$

d) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

<u>Lösung:</u>

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 \\
f'(x) &= f(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + x \\
f''(x) &= f(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + 1 \\
f'''(x) &= f(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + 1 &= 0 && \Big|\, -1 \\
-\frac{2}{3}\mathrm{e}^x &= -1 && \Big|\, \div\left(-\frac{2}{3}\right) \\
\mathrm{e}^x &= \frac{3}{2} && \Big|\, \ln \\
x &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
x &\approx 0.4054
\end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$f'''\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = -1$$

$f'''\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle an der Stelle $x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$$f\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 - 1 \Rightarrow W\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) \,\Bigg|\, \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 - 1\right)$$

Aufgabe 2

1.1 Das Schaubild ist symmetrisch zum Ursprung

$\Rightarrow$ weiterere Punkte, durch die das Schaubild geht:

$P_3(0 \mid 0)$, $P_4\left(-1 \;\middle|\; -\frac{5}{4}\right)$

Setze $P_1\left(1 \;\middle|\; \frac{5}{4}\right)$, $P_2(2 \mid -2)$,

$P_3(0 \mid 0)$ und $P_4\left(-1 \;\middle|\; -\frac{5}{4}\right)$ in $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ ein:

$$
\begin{array}{llllllllll}
P_1 & \Rightarrow & f(1) & = & \frac{5}{4} & = & 1a & + & 1b & + & 1c & + & d \\
P_2 & \Rightarrow & f(2) & = & -2 & = & 8a & + & 4b & + & 2c & + & d \\
P_3 & \Rightarrow & f(0) & = & 0 & = & 0a & + & 0b & + & 0c & + & d \\
P_4 & \Rightarrow & f(-1) & = & -\frac{5}{4} & = & -1a & + & 1b & - & 1c & + & d
\end{array}
$$

bilde die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$
\left|\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \\
8 & 4 & 2 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -\frac{5}{4}
\end{array}\right|
$$

löse das LGS mit dem GTR:

$a = -\frac{3}{4}$

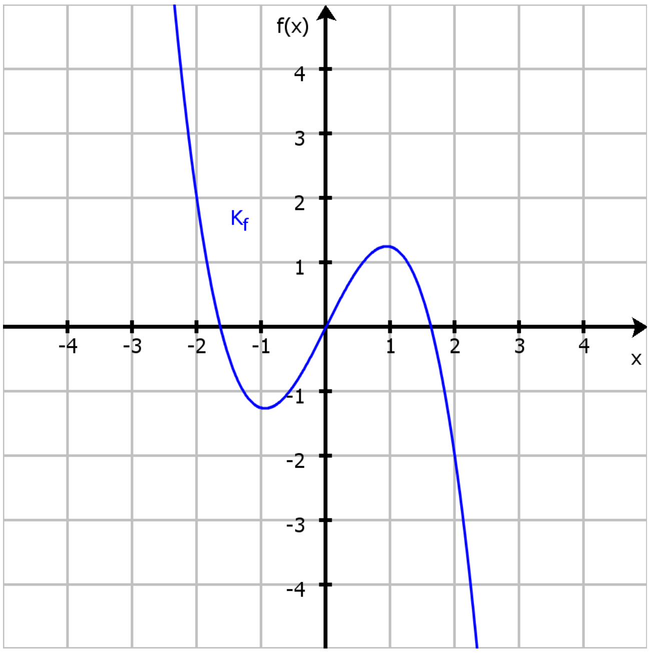
$b = 0$

$c = 2$

$d = 0$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2\,x$

1.2 Schaubild:



1.3 Berechne die Nullstellen von f:

Setze $f(x)=0$:

$$f(x) = 0$$

$$-\frac{3}{4}x^3 + 2x = 0$$

$$x\left(-\frac{3}{4}x^2 + 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x=0 \quad \text{oder} \quad -\frac{3}{4}x^2 + 2 = 0$$

$$-\frac{3}{4}x^2 + 2 = 0 \qquad \left|-2\right.$$

$$-\frac{3}{4}x^2 = -2 \qquad \left|\div\left(-\frac{3}{4}\right)\right.$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \qquad \left|\sqrt{}\right.$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow N_1(0 \mid 0), \quad N_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \;\middle|\; 0\right), \quad N_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \;\middle|\; 0\right)$$

Wie das Schaubild zeigt, verläuft K_f zwischen den Nullstellen N_1 und N_2 oberhalb der x-Achse $\Rightarrow$ für $N_1 < x < N_2$ sind die Funktionswerte $f(x)$ positiv.

