Lösungsvorschlag zu Aufgabe FGLK0002

1.1 Setze $f(x)=0$:
Löse nach x auf:

$$\begin{aligned} -3\,\mathrm{e}^{x}-9\,\mathrm{e}^{-x}+12 &= 0 \quad \Big|\cdot \mathrm{e}^{x} \\ -3\,\mathrm{e}^{2x}+12\,\mathrm{e}^{x}-9 &= 0 \\ -3\,\mathrm{e}^{2(x)}+12\,\mathrm{e}^{x}-9 &= 0 \\ -3\left(\mathrm{e}^{(x)}\right)^{2}+12\,\mathrm{e}^{x}-9 &= 0 \quad \Big|\ \text{Substituton: } \mathrm{e}^{x} \rightarrow u \\ -3u^{2}+12u-9 &= 0 \end{aligned}$$

mit $a=-3$, $b=12$ und $c=-9$ in die Mitternachtsformel einsetzen:

$$u_{1,2} = \frac{-12\pm\sqrt{12^{2}-4\cdot(-3)\cdot(-9)}}{2\cdot(-3)}$$

$$u_{1,2} = \frac{-12\pm 6}{-6}$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 3$$

Rücksubstituton: $u \rightarrow \mathrm{e}^{x}$

u_1: $\mathrm{e}^{x} = 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x} &= 1 \quad \Big|\ \ln \\ x &= \ln(1) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 0$

u_2: $\mathrm{e}^{x} = 3$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x} &= 3 \quad \Big|\ \ln \\ x &= \ln(3) \\ x &\approx 1.0986 \end{aligned}$$

$x_2 = \ln(3)$

$\mathrm{N}_1(0 \mid 0)$ $\quad$ $\mathrm{N}_2(\ln(3) \mid 0)$

1.2 Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3\,\mathrm{e}^{x}-\frac{9}{\mathrm{e}^{x}}+12 = -3\,\mathrm{e}^{x}-9\,\mathrm{e}^{-x}+12 \\ f'(x) &= -3\,\mathrm{e}^{x}+9\,\mathrm{e}^{-x} \\ f''(x) &= -3\,\mathrm{e}^{x}-9\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
-3e^{x}+9e^{-x} &= 0 && \mid \cdot e^{x} \\
-3e^{2x}+9 &= 0 && \mid -9 \\
-3e^{2x} &= -9 && \mid \div(-3) \\
e^{2x} &= 3 && \mid \ln \\
2x &= \ln(3) && \mid \div 2 \\
x &= \frac{1}{2}\ln(3) && \approx 0{,}5493
\end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = \frac{1}{2}\ln(3)$:

$$f''\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = -3\underbrace{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}}_{>0} - 9\underbrace{e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}_{>0}$$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = \frac{1}{2}\ln(3)$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= -3e^{\frac{1}{2}\ln(3)} - 9e^{-\frac{1}{2}\ln(3)} + 12 \\
&\approx 1{,}6077
\end{aligned}$$

$\Rightarrow H(0{,}5493 \mid 1{,}6077)$

1.3 Sie K_g die Kurve von g. Zeige, dass K_g und K_f sich an der Stelle $x = \ln(3)$ schneiden:

$$\left.\begin{aligned}
g(\ln(3)) &= \frac{1}{6}\ln(3) - \frac{\ln(3)}{6} && = 0 \\
f(\ln(3)) &= -3e^{\ln(3)} - \frac{9}{e^{\ln(3)}} + 12 = -9-3+12 && = 0
\end{aligned}\right\}$$

K_g und K_f schneiden sich an der Stelle $x = \ln(3)$

Zeige, dass sich K_g und K_f im rechten Winkel schneiden:

Steigung von f an der Stelle $x = \ln(3)$: $f'(\ln(3)) = -6$

Für die Steigung von g gilt: $m_g = \frac{1}{6} = -\frac{1}{f'(\ln(3))}$

Somit schneiden sich K_g und K_f im rechten Winkel.

1.4 K_f besitzt zwei Nullstellen und eine Extremstelle $\Rightarrow$ p muss vom Grad 2 sein.

Setze $P_1(0 \mid 0)$, $P_2(1{,}0986 \mid 0)$ und $P_3(0{,}5493 \mid 1{,}6077)$
in $f(x) = ax^2+bx+c$ ein:

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcr} P_1 & \Rightarrow & f(0) & = & 0 & = & & & & & c \\ P_2 & \Rightarrow & f(1{,}0986) & = & 0 & = & 1{,}2069\,a & + & 1{,}0986\,b & + & c \\ P_3 & \Rightarrow & f(0{,}5493) & = & 1{,}6077 & = & 0{,}3017\,a & + & 0{,}5493\,b & + & c \end{array}$$

bilde die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1{,}2069 & 1{,}0986 & 1 & 0 \\ 0{,}3017 & 0{,}5493 & 1 & 1{,}6077 \end{array}\right|$$

löse das LGS mit dem GTR:

$$\begin{array}{lcl} a & = & -5{,}3279 \\ b & = & 5{,}8531 \\ c & = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad p(x) = -5{,}3279\,x^2 + 5{,}8531\,x$

1.5