Lösungsvorschlag zu Aufgabe FGLK0001

1.1 Setze $f(x)=0$:
Löse nach x auf:

$$2\,e^{4x}-2\,e^{2x}-\frac{3}{2} = 0$$

$$2\,e^{2(2x)}-2\,e^{2x}-\frac{3}{2} = 0$$

$$2\left(e^{(2x)}\right)^2-2\,e^{2x}-\frac{3}{2} = 0 \quad \Big| \text{ Substituton: } e^{2x} \rightarrow u$$

$$2u^2-2u-\frac{3}{2} = 0$$

mit $a=2,\ b=-2$ und $c=-\frac{3}{2}$ in die Mitternachtsformel einsetzen:

$$u_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}}{2\cdot 2}$$

$$u_{1,2} = \frac{2\pm 4}{4}$$

$$u_1 = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}$$

Rücksubstituton: $u \rightarrow e^{2x}$

u_1: $e^{2x} = \frac{3}{2}$

$$e^{2x} = \frac{3}{2} \quad \Big|\ \ln$$

$$2x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \Big|\div 2$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2}$$

$$x \approx 0{,}2027$$

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2}$$

u_2: $e^{2x} = -\frac{1}{2}$

hat keine Lösung

$$N_1\left(\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2}\;\middle|\;0\right)$$

1.2 Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2e^{4x} - 2e^{2x} - \frac{3}{2} \\ f'(x) &= 8e^{4x} - 4e^{2x} \\ f''(x) &= 32e^{4x} - 8e^{2x} \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:
$8e^{4x} - 4e^{2x} = 0$ ausklammern von e^{2x}:
$e^{2x}\left(8e^{2x} - 4\right) = 0$
es ist $e^{2x} > 0$ für alle x
$\underset{\text{Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow}$ $8e^{2x} - 4 = 0$

$$\begin{aligned} 8e^{2x} - 4 &= 0 && \mid +4 \\ 8e^{2x} &= 4 && \mid \div 8 \\ e^{2x} &= \frac{1}{2} && \mid \ln \\ 2x &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) && \mid \div 2 \\ x_1 &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= 32e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 8e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 32 \cdot \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{2} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

$f''(0) > 0 \;\Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= 2e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 2e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{3}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; T\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\;\middle|\;-2\right)$$

1.3 Die Kurve verläuft vom 3. in den 1. Quadranten.

$$x \to -\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}$ ist waagerechte Asymptote.

$x < \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$: f ist monoton fallend

$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) < x$: f ist monoton steigend

1.4 Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$f(x) = 2e^{4x} - 2e^{2x} - \frac{3}{2}$$
$$f'(x) = 8e^{4x} - 4e^{2x}$$

Berechne die Steigung an der Stelle $x = 0$:
$f'(0) = 8e^{4\cdot 0} - 4e^{2\cdot 0} = 8 - 4 = 4$

f hat in dem Punkt, in dem K_f die y-Achse schneidet, die Steigung 4 .

1.5