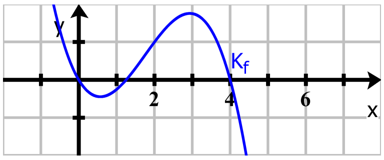
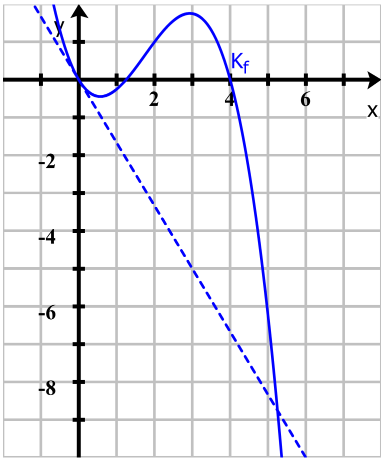
Berühren und senkrecht schneiden (Aufgaben)

Aufgabe 5



Das nebenstehende Schaubild zeigt die Kurve K_f der Funktion f mit $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{4}x^2-\frac{5}{3}x$. Bestimmen Sie eine Ursprungsgerade, die außer dem Ursprung nur noch einen weiteren gemeinsamen Punkt unterhalb der x-Achse mit K_f hat.



Lösung:

Die gesuchte Gerade hat die Gleichung $y=mx$. Da die Gerade mit K_f nur zwei gemeinsame Punkte hat und der Punkt unterhalb der x-Achse liegt, muss der Ursprung ein Berührpunkt von der Geraden und K_f sein (siehe nebenstehendes Schaubild).

$\Rightarrow$ Bestimme mit Hilfe der 1. Ableitung von f die Steigung der Geraden.

$f'(x)=-x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{3} \Rightarrow f'(0)=-\frac{5}{3} \Rightarrow y=-\frac{5}{3}x$ ist die Gleichung der gesuchten Gerade.

Überprüfung, das die Gerade nur zwei gemeinsame Punkte mit K_f hat:

Setze $f(x)=-\frac{5}{3}x \underset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x_1=0$ und $x_2=\frac{21}{4}$ damit ist gezeigt, dass die Gerade und K_f nur zwei gemeinsame Punkte haben.

Aufgabe 6

Sei f eine Funktion mit $f(x)=-\frac{1}{3}e^{2-x}-2x+c \quad (c\in\mathbb{R})$ und K_f die Kurve von f. Bestimmen Sie den exakten Wert von c, so dass K_f die x-Achse nur berührt.

Lösung:

Die x-Achse hat die Steigung $m=0 \Rightarrow$ suche die Stelle(n) an denen K_f die Steigung $m=0$ hat:

1. Ableitung von f: $f'(x)=\frac{1}{3}e^{2-x}-2$

Setze $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}e^{2-x}-2=0 \Rightarrow e^{2-x}=6 \Rightarrow 2-x=\ln(6) \Rightarrow x=2-\ln(6)$

An der Stelle $x=2-\ln(6)$ muss K_f die x-Achse berühren $\Rightarrow$
$f(2-\ln(6))=0 \Rightarrow -\frac{1}{3}e^{\ln(6)}-4+2\ln(6)+c=0 \Rightarrow -2-4+2\ln(6)=0 \Rightarrow c=2\ln(6)-6$.

Aufgabe 7

Seien f und h zwei Funktionen. Werden die Funktionsterme von f und h gleichgesetzt, so ergibt sich die Gleichung $(x-2)(x+1)^2=0$. Wie liegen die Kurven von f und h zueinander?

Lösung:

$(x-2)(x+1)^2=0$ hat die Lösungen $x_{1,2}=-1$ und $x_3=2$

$x_{1,2}=-1$ ist eine doppelte Lösung der Gleichung $\Rightarrow$ die Kurven von f und h berühren sich an der Stelle $x=-1$.

$x_3=2$ ist eine einfache Lösung der Gleichung $\Rightarrow$ die Kurven von f und h schneiden sich an der Stelle $x=2$.

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie K_f und K_h zueinander liegen können:

1. Für $x<2$ liegt K_f oberhalb von K_h, danach liegt K_h oberhalb von K_f.
2. Für $x<2$ liegt K_h oberhalb von K_f, danach liegt K_f oberhalb von K_h.