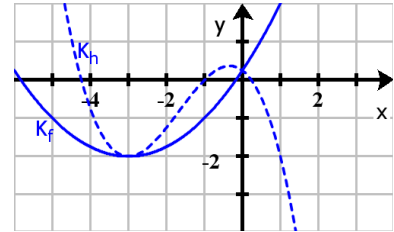


Berühren und senkrecht schneiden (Aufgaben)

Aufgabe 1

Das nebenstehende Schaubild zeigt die Graphen K_f und K_h der Funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ und $h(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + 5x^2 + 3x - 1)$. Zeigen Sie, dass K_f und K_h zwei gemeinsame Punkte haben und nur einer von ihnen ein Berührungspunkt ist.



Lösung:

Bestimme die Schnittpunkte von K_f und K_h :

$$\text{Setze } f(x) = h(x) \Rightarrow f(x) - h(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x(x^2 + 6x + 9) = 0$$

nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x = 0 \vee x^2 + 6x + 9 = 0$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Setze $a=1$, $b=6$, $c=9$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm 0}{2} \end{aligned}$$

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = -3$$

damit haben K_f und K_h zwei gemeinsame Punkte.

Zeige, dass nur einer von beiden ein Berührungspunkt ist:

Bilde von beiden Funktionen die 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+3) \quad \text{und} \quad h'(x) = -\frac{1}{4}(3x^2 + 10x + 3)$$

Setze $x = -3$ und $x = 0$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-3) = 0 \\ h'(-3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Berührungspunkt an der Stelle } x = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = \frac{3}{2} \\ h'(0) = -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{kein Berührungspunkt an der Stelle } x = 0$$

Aufgabe 2

Wo berühren sich die Graphen von f und h ?

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{und} \quad h(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 1$$

Lösung:

Suche die Stellen, an denen die Graphen von f und h gemeinsame Punkte haben:



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

2018 Henrik Horstmann

Setze $f(x)=h(x) \Rightarrow 0=h(x)-f(x) \Rightarrow 0=-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{2}{x^2}$

Gleichung mit x^2 auf beiden Seiten multiplizieren:

$0=-\frac{1}{8}x^4+x^2-2$ Löse die Gleichung mit Hilfe von Substitution auf:

$$-\frac{1}{8}x^4+x^2-2 = 0 \quad | \cdot 8$$

$$-x^4+8x^2-16 = 0 \quad | \text{ Substitution: } x^2 \rightarrow u$$

$$-u^2+8u-16 = 0$$

Setze $a=-1$, $b=8$, $c=-16$ in die Lösungsformel ein:

$$u_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{-2}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

$$= \frac{-8 \pm 0}{-2}$$

$$u_1 = 4$$

$$u_2 = 4$$

Rücksubstitution: $u \rightarrow x^2$

$$u_1 \rightarrow x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

$$u_2 \rightarrow x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{4}$$

$$x_{3,4} = \pm 2$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = -2$$

Prüfe, ob beide Graphen an $x=-2$ und $x=2$ jeweils die gleiche Steigung haben. Bilde dazu die 1. Ableitung von f und h :

$$f'(x)=-\frac{4}{x^3} \text{ und } h'(x)=-\frac{1}{4}x$$

Setze $x_1=-2$ und $x_2=2$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-2)=\frac{1}{2} \\ h'(-2)=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Beührpunkt an der Stelle } x_1=-2$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2)=-\frac{1}{2} \\ h'(2)=-\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Beührpunkt an der Stelle } x_2=2$$



Aufgabe 3

Sei K_f der Graph von f und K_h der Graph von h . Zeigen Sie, dass die Kurve K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f liegt (Lage der Kurven zueinander). Es ist $f(x) = \cos(x) + 1$ und $h(x) = x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wenn K_h oberhalb von K_f liegt, dann dürfen sich K_h und K_f nicht schneiden:

Prüfe auf gemeinsame Kurvenpunkte:

Setze $f(x) = h(x) \Rightarrow \cos(x) + 1 = x^2 + 2 \Rightarrow \cos(x) - x^2 = 1$. Da $\cos(x) \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ist, kann nur $x = 0$ eine Lösung der Gleichung sein.

Prüfe, ob $x = 0$ Berührungspunkte (d.h. keine echten Schnittpunkte) sind:

Bilde von f und h die 1. Ableitung:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ und } h'(x) = 2x$$

Setze $x = 0$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Berührungspunkt an der Stelle } x = 0$$

Daraus folgt zusammen mit der Stetigkeit der beiden Funktionen, dass eine der beiden Kurven für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der anderen Kurve liegt. Prüfe, ob K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f liegt:

Wähle für die Prüfung eine beliebige Stelle ungleich der Berührstellen: $x = \pi$

$$f(\pi) = 0 < 10,87 \approx \pi^2 + 2 = h(\pi)$$

Somit liegt die Kurve K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f .

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und c so, dass sich die Kurven von f und h an der Stelle $x = 1$ berühren.

$$f(x) = a e^{x-1} - x + c \quad (a, c \in \mathbb{R}) \text{ und } h(x) = -\frac{1}{9}(2x^2 - 13x - 7)$$

Lösung:

Sei K_f die Kurve von f und K_h die Kurve von h . Wenn sich K_f und K_h an der Stelle $x = 1$ berühren, dann muss gelten:

1. K_f und K_h haben an der Stelle $x = 1$ die gleiche Steigung.
2. K_f und K_h haben an der Stelle $x = 1$ einen gemeinsamen Kurvenpunkt.

Bestimme die Steigung von K_f an der Stelle $x = 1$ mit Hilfe der 1. Ableitung von h :

$$h'(x) = -\frac{1}{9}(4x - 13), \quad h'(1) = 1$$

Die 1. Ableitung von f ist $f'(x) = a e^{x-1} - 1$. Es gilt $f'(1) = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$.

Gemeinsamer Kurvenpunkt an der Stelle $x = 1$: $h(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 2$:

$$f(1) = 2e^0 - 1 + c = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$

Damit ist $f(x) = a e^{x-1} - x + 1$.

