Extremstellen (Lösungen)

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit

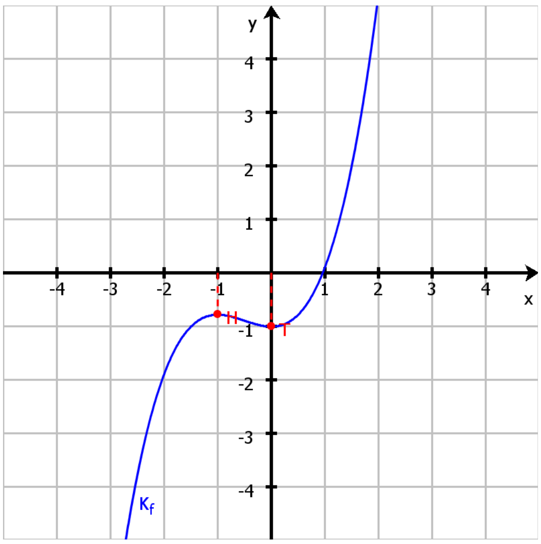
$$f(x) = \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 1$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

<u>Lösung:</u>

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 1 \\ f'(x) &= \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \\ f''(x) &= \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$



Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:

$\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$ ausklammern von x:

$$x\left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$\underset{\text{Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow}$ $x_1 = 0$ oder $\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} &= 0 \quad \left| -\frac{4}{3} \right. \\ \frac{4}{3}x &= -\frac{4}{3} \quad \left| \div\frac{4}{3} \right. \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = 0$:

$$f''(0) = \frac{4}{3}$$

$f''(0) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = 0$

$f(0) = -1 \Rightarrow T(0 \mid -1)$

Untersuche die Stelle $x = -1$:

$$f''(-1) = -\frac{4}{3}$$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = -1$

$f(-1) = -\frac{7}{9} \Rightarrow H\left(-1 \;\middle|\; -\frac{7}{9}\right)$

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit

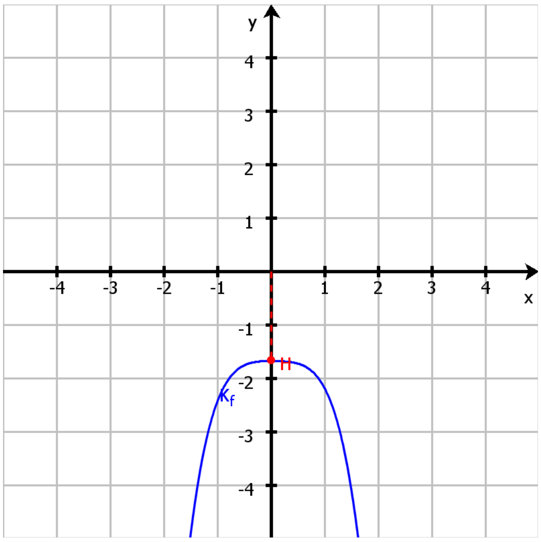
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{19}{144}x^2 - \frac{5}{3}$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

Lösung:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{19}{144}x^2 - \frac{5}{3} \\ f'(x) &= -2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{19}{72}x \\ f''(x) &= -6x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{19}{72} \end{aligned}$$



Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:

$-2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{19}{72}x = 0$ ausklammern von x:

$$x\left(-2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{19}{72}\right) = 0$$

$$\underset{\text{Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow} \quad x_1 = 0 \text{ oder } -2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{19}{72} = 0$$

setze $a = -2,\ b = \frac{1}{3},\ c = -\frac{19}{72}$

in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\cdot(-2)\cdot\left(-\frac{19}{72}\right)}}{2\cdot(-2)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{19}{9}}}{-4} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{-2}}{-4} \end{aligned}$$

$\sqrt{-2}$ hat keine Lösung

Untersuche die Stelle $x = 0$:

$$f''(0) = -\frac{19}{72}$$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = 0$

$$f(0) = -\frac{5}{3} \Rightarrow H\left(0 \,\middle|\, -\frac{5}{3}\right)$$

c) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit

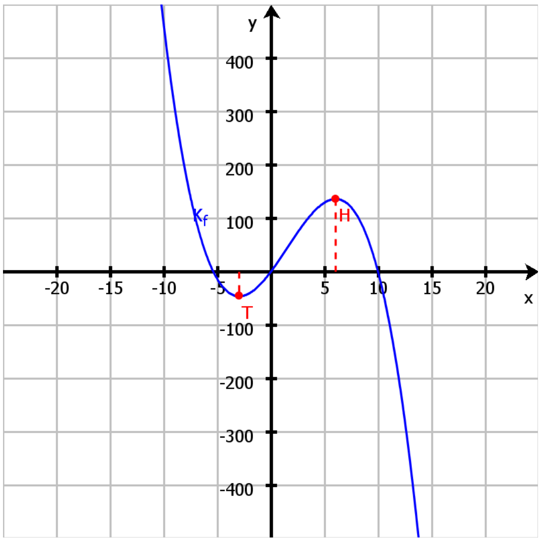
$$f(x) = -0{,}5\,x^3 + 2{,}25\,x^2 + 27\,x + 2$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

<u>Lösung:</u>

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}5\,x^3 + 2{,}25\,x^2 + 27\,x + 2 \\ f'(x) &= -1{,}5\,x^2 + 4{,}5\,x + 27 \\ f''(x) &= -3x + 4{,}5 \end{aligned}$$



Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:
setze $a = -1{,}5$, $b = 4{,}5$, $c = 27$
in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{(4{,}5)^2 - 4 \cdot (-1{,}5) \cdot 27}}{2 \cdot (-1{,}5)} \\ &= \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 + 162}}{-3} \\ &= \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{182{,}25}}{-3} \\ &= \frac{-4{,}5 \pm 13{,}5}{-3} \\ x_1 &= -3 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = -3$:
$f''(-3) = 13{,}5$
$f''(-3) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = -3$
$f(-3) = -45{,}25 \Rightarrow T(-3 \mid -45{,}25)$

Untersuche die Stelle $x = 6$:
$f''(6) = -13{,}5$
$f''(6) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = 6$
$f(6) = 137 \Rightarrow H(6 \mid 137)$

d) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}3x^5 - 13\,x^3 + 37{,}5\,x + 1$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

<u>Lösung:</u>

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

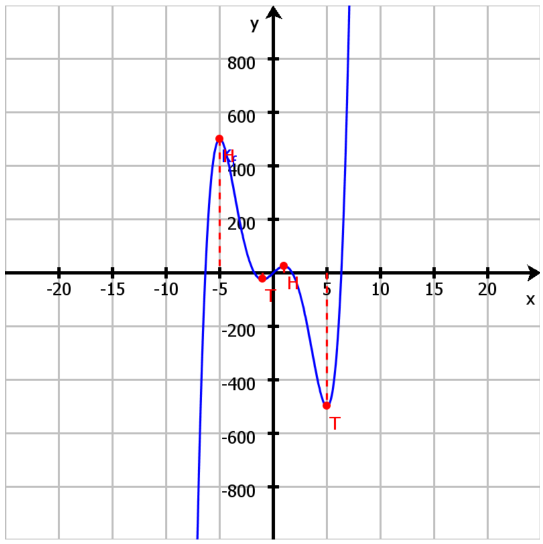
$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}3x^5 - 13\,x^3 + 37{,}5\,x + 1 \\ f'(x) &= 1{,}5x^4 - 39\,x^2 + 37{,}5 \\ f''(x) &= 6x^3 - 78\,x \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:

$$1{,}5x^4 - 39\,x^2 + 37{,}5 = 0 \quad \Big| \text{ Substitution: } x^2 \to u$$

$$1{,}5u^2 - 39\,u + 37{,}5 = 0$$

setze $a = 1{,}5,\ b = -39,\ c = 37{,}5$
in die Lösungsformel ein:



$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{39 \pm \sqrt{(-39)^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 37{,}5}}{2 \cdot 1{,}5} \\ &= \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 225}}{3} \\ &= \frac{39 \pm \sqrt{1296}}{3} \\ &= \frac{39 \pm 36}{3} \\ u_1 &= 25 \\ u_2 &= 1 \end{aligned}$$

Rücksubstitution: $u \to x^2$

$$\begin{aligned} u_1 \quad \to \quad x^2 &= 25 \quad \Big| \sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{25} \\ x_1 &= 5 \\ x_2 &= -5 \\ u_2 \quad \to \quad x^2 &= 1 \quad \Big| \sqrt{\ } \\ x_{3,4} &= \pm\sqrt{1} \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = 5$:

$f''(5) \;=\; 360$

$f''(5) > 0 \;\Rightarrow\;$ Tiefpunkt an der Stelle $x = 5$

$f(5) = -499 \;\Rightarrow\; T(5 \mid -499)$

Untersuche die Stelle $x = -5$:

$f''(-5) \;=\; -360$

$f''(-5) < 0 \;\Rightarrow\;$ Hochpunkt an der Stelle $x = -5$

$f(-5) = 501 \;\Rightarrow\; H(-5 \mid 501)$

Untersuche die Stelle $x = 1$:

$f''(1) \;=\; -72$

$f''(1) < 0 \;\Rightarrow\;$ Hochpunkt an der Stelle $x = 1$

$f(1) = 25{,}8 \;\Rightarrow\; H(1 \mid 25{,}8)$

Untersuche die Stelle $x = -1$:

$f''(-1) \;=\; 72$

$f''(-1) > 0 \;\Rightarrow\;$ Tiefpunkt an der Stelle $x = -1$

$f(-1) = -23{,}8 \;\Rightarrow\; T(-1 \mid -23{,}8)$

e) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}25\,x^4 - 2{,}5\,x^3 - 6{,}75\,x^2 - 2$$

und Zeichnen Sie in einem Schaubild den Graphen von f und die Extrempunkte ein.

<u>Lösung:</u>

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}25\,x^4 - 2{,}5\,x^3 - 6{,}75\,x^2 - 2 \\ f'(x) &= -x^3 - 7{,}5\,x^2 - 13{,}5\,x \\ f''(x) &= -3x^2 - 15\,x - 13{,}5 \end{aligned}$$

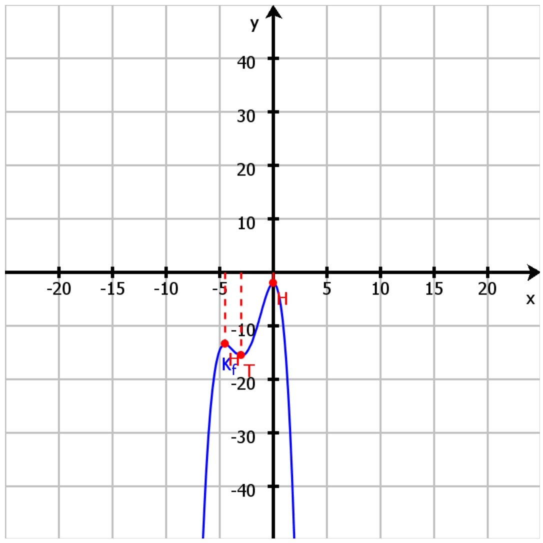
Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:

Setze $f'(x) = 0$:

$-x^3 - 7{,}5\,x^2 - 13{,}5\,x = 0$ ausklammern von x:

$x\left(-x^2 - 7{,}5\,x - 13{,}5\right) = 0$

$\underset{\text{Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow}$ $x_1 = 0$ oder $-x^2 - 7{,}5\,x - 13{,}5 = 0$



setze $a = -1,\ b = -7{,}5,\ c = -13{,}5$

in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{7{,}5 \pm \sqrt{(-7{,}5)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-13{,}5)}}{2\cdot(-1)} \\ &= \frac{7{,}5 \pm \sqrt{56{,}25 - 54}}{-2} \\ &= \frac{7{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}}{-2} \\ &= \frac{7{,}5 \pm 1{,}5}{-2} \\ x_2 &= -4{,}5 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = -4{,}5$:

$f''(-4.5) \;=\; -6{,}75$

$f''(-4.5) < 0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = -4{,}5$

$f(-4{,}5) = -13{,}3906 \;\Rightarrow\; H\left(-4{,}5 \mid -13{,}3906\right)$

Untersuche die Stelle $x = -3$:

$f''(-3) \;=\; 4{,}5$

$f''(-3) > 0 \;\Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = -3$

$f(-3) = -15{,}5 \;\Rightarrow\; T\left(-3 \mid -15{,}5\right)$

Untersuche die Stelle $x = 0$:

$f''(0) \;=\; -13{,}5$

$f''(0) < 0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = 0$

$f(0) = -2 \;\Rightarrow\; H\left(0 \mid -2\right)$

