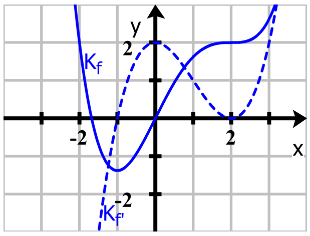
Monotonie (Aufgaben)

Aufgabe 1

Sei f eine Funktion mit $f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3+2x$. Untersuchen Sie das Monotonie Verhalten von f mit Hilfe der Ableitungsfunktion.

Lösung:



Betrachte dazu das Schaubild von f':

$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2 \underset{\text{CAS}}{=} \frac{1}{2}(x-2)^2(x+1)$

Nullstellen von f': $x_1=-1$ und $x_{2,3}=2$ (doppelte Nullstelle = Berührpunkt)

$f'(-2)=-8 \Rightarrow$ für $x<-1$ ist f (streng) monoton fallend
$(f'(x)<0$ für alle $x<-1)$.

Da $x_1=-1$ kein Berührpunkt von K_f mit der x-Achse ist $\Rightarrow$ $-1<x$ ist f monoton steigend.

Das Monotonie Verhalten ändert sich auch nicht an der Stelle $x_{2,3}=2$, da $f'(x)>0$ für $x>2$.

f ist für $-1<x$ sogar streng monoton steigend, da für $-1<x$ gilt: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^3-ax+1$ $(a\in\mathbb{R})$. Für welche Werte von a ist f für alle $x\in\mathbb{R}$ streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Betrachte f': $f'(x)=3x^2-a$

Untersuche $f'(x)>0$ für alle x:

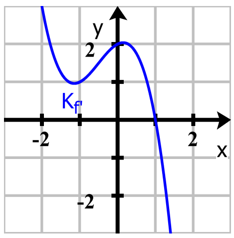
$$\begin{aligned} 3x^2-a &> 0 \quad |+a \\ x^2 &> a \quad |\div 3 \\ x^2 &> \frac{a}{3} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $x^2\geq 0 \Rightarrow a<0$.

Auch für $a=0$ ist f streng monoton wachsend, denn für $x=0$ ist hat f' eine doppelte Nullstelle (= Berührstelle), was bedeutet, das sich das Monotonie Verhalten nicht ändert.

Für $a\leq 0$ ist f für alle $x\in\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

Aufgabe 3



Das Schaubild zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion f':

Welche Aussagen können Sie über das Monotonie Verhalten der Funktion f machen? Zeichnen Sie zwei mögliche Graphen von f in das Schaubild ein.

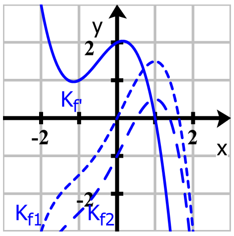
Lösung:

Für $x<1$ ist f streng monoton steigend $(f'(x)>0)$.

Für $1<x$ ist f streng monoton fallend $(f'(x)<0)$.

Eine vertikale Verschiebung von f hat keinen Einfluss auf das Monotonie Verhalten von f.

Aufgabe 4



Zeigen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = \sin(x) + \frac{3}{2}x$ nur eine Nullstelle besitzt.

Lösung:

Für $x = 0$ besitzt f eine Nullstelle, denn $f(0) = \underbrace{\sin(0)}_{=0} + 0 = 0$.

Untersuche das Monotonie Verhalten von f:

Betrachte f': $f'(x) = \cos(x) + \frac{3}{2}$

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \cos(x) + \frac{3}{2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

damit ist f streng monoton steigend für alle $x \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass es keine weiteren Nullstellen außer $N(0 \mid 0)$ gibt.

