Monotonie (Lösungen)

Aufgabe 1:

Lesen Sie aus den Schaubildern der Ableitungsfunktion die Bereiche (Intervalle) heraus, in denen die Funktion f monoton steigt, bzw. fällt. Geben Sie die Stellen an, an denen der Graph von f eine waagerechte Tangente besitzt.

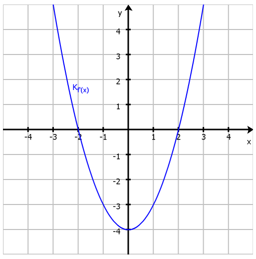
a) 

Schaubild von $f'(x)$

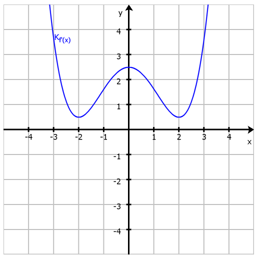
b) 

Schaubild von $f'(x)$

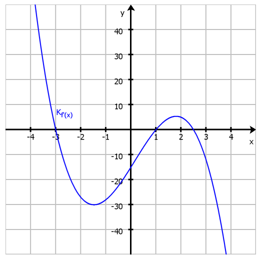
c) 

Schaubild von $f'(x)$

Lösung:

b) $x < -2$: f ist monoton steigend.

$-2 < x < 2$: f ist monoton fallend.

$2 < x$: f ist monoton steigend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ waagerechte Tangenten.

c) Für $-\infty < x < \infty$ ist f ist monoton steigend. Der Graph von f besitzt keine waagerechten Tangenten.

d) $x < -3$: f ist monoton steigend.

$-3 < x < 1$: f ist monoton fallend.

$1 < x < \frac{5}{2}$: f ist monoton steigend.

$\frac{5}{2} < x$: f ist monoton fallend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -3$, $x = 1$ und $x = \frac{5}{2}$ waagerechte Tangenten.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die exakten Bereiche (Intervalle), in denen die Funktion f monoton steigt, bzw. fällt. Geben Sie die exakten Stellen an, an denen der Graph von f eine waagerechte Tangente besitzt.

a) $f(x) = \frac{91}{4}x^4 + \frac{199}{3}x^3 - \frac{207}{2}x^2 + 45x - 5$

Lösung:

1. Ableitungsfunktion bestimmen und deren Nullstellen berechnen:

$f'(x) = 91x^3 + 199x^2 - 207x + 45$

 © 2008 Henrik Horstmann

$91x^3 + 199x^2 - 207x + 45 \quad = \quad 0$

Berechne die erste Lösung mit dem GTR und wende das Horner-Schema an:

$\Rightarrow x_1 = -3$

„alt“	x^3	x^2	x^1	x^0
	91	199	-207	45
$x_1 = -3$		-273	222	-45
	91	-74	15	0
„neu“	x^2	x^1	x^0	

$\Rightarrow \quad (x+3)(91x^2 - 74x + 15) \quad = \quad 0$

Setze $91x^2 - 74x + 15 = 0$

$91x^2 - 74x + 15 \quad = \quad 0$

Setze $a=91,\ b=-74,\ c=15$ in die Lösungsformel ein:

$$x_{(2,\,3)} = \frac{74 \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 91 \cdot 15}}{2 \cdot 91}$$

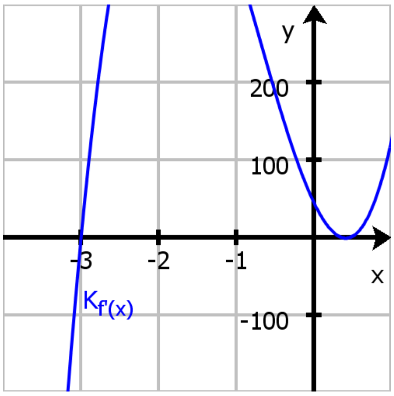
$$= \frac{74 \pm \sqrt{5476 - 5460}}{182}$$

$$= \frac{74 \pm \sqrt{16}}{182}$$

$$= \frac{74 \pm 4}{182}$$

$$x_2 = \frac{5}{13}$$

$$x_3 = \frac{3}{7}$$



$x < -3$: f ist monoton fallend.

$-3 < x < \frac{5}{13}$: f ist monoton steigend.

$\frac{5}{13} < x < \frac{3}{7}$: f ist monoton fallend.

$\frac{3}{7} < x$: f ist monoton steigend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -3$, $x = \frac{5}{13}$ und $x = \frac{3}{7}$ waagerechte Tangenten.

b) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{26}{27}x^3 + \frac{8}{9}x - \frac{2}{3}$

<u>Lösung:</u>

1. Ableitungsfunktion bestimmen und deren Nullstellen berechnen:

$f'(x) = 2x^4 - \frac{26}{9}x^2 + \frac{8}{9}$

Setze $f'(x) = 0$:

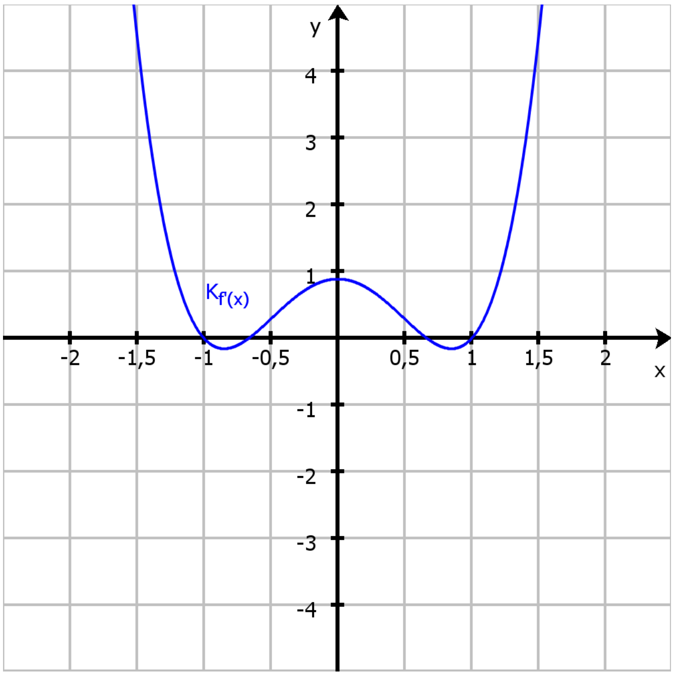
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x^4 - \frac{26}{9}x^2 + \frac{8}{9} &= 0 \quad \Big| \text{ Substitution: } x^2 \rightarrow u \\ 2u^2 - \frac{26}{9}u + \frac{8}{9} &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a = 2$, $b = -\frac{26}{9}$, $c = \frac{8}{9}$ in die Mitternachtsformel ein:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{\frac{26}{9} \pm \sqrt{\left(-\frac{26}{9}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{8}{9}}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{\frac{26}{9} \pm \sqrt{\frac{676}{81} - \frac{64}{9}}}{4} \\ &= \frac{\frac{26}{9} \pm \sqrt{\frac{100}{81}}}{4} \\ &= \frac{\frac{26}{9} \pm \frac{10}{9}}{4} \\ u_1 &= \frac{4}{9} \\ u_2 &= 1 \end{aligned}$$

Rücksubstitution: $u \rightarrow x^2$

$$
\begin{aligned}
u_1 \quad \rightarrow \quad x^2 &= \frac{4}{9} \qquad \Big| \sqrt{} \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \\
x_{1,2} &= \pm\frac{2}{3} \\
x_1 &= \frac{2}{3} \\
x_2 &= -\frac{2}{3} \\
u_2 \quad \rightarrow \quad x^2 &= 1 \qquad \Big| \sqrt{} \\
x_{3,4} &= \pm\sqrt{1} \\
x_{3,4} &= \pm 1 \\
x_3 &= 1 \\
x_4 &= -1
\end{aligned}
$$



$x < -1$: f ist monoton steigend.

$-1 < x < -\frac{2}{3}$: f ist monoton fallend.

$-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$: f ist monoton steigend.

$\frac{2}{3} < x < 1$: f ist monoton fallend.

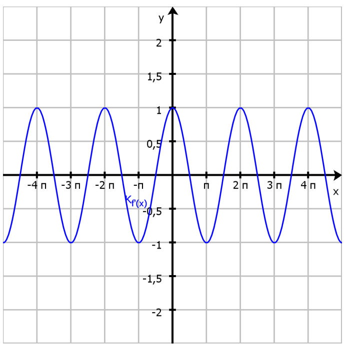
$1 < x$: f ist monoton steigend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -1$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ und $x = 1$ waagerechte Tangenten.

e) $f(x) = \sin(x)$

Lösung:

1. Ableitungsfunktion und deren Nullstellen bestimmen: $f'(x) = \cos(x)$



$\cos(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right);\; n \in \mathbb{Z}$ Damit ist

$\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) < x < \pi\left(n + \frac{3}{2}\right)$:

1. f ist monoton fallend, wenn $n \in \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
2. f ist monoton steigend, wenn $n \in \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right);\; n \in \mathbb{Z}$ waagerechte Tangenten.

 © 2008 Henrik Horstmann