Tangenten von einem Punkt an eine Kurve

Aufgabe 1

Sei $f(x)=(x+3)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ eine Funktion und K der Graph von f.
Wie viele Tangenten an K gibt es, die durch den Punkt $P(0\,|\,-3)$ gehen?

Aufgabe 2

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=\sqrt{x}$; $x\in\mathbb{R}_+$. Ihr Schaubild ist K.
Bestimmen Sie alle Tangenten von $P(-1\,|\,0)$ an K.

Aufgabe 3

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=\left(\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2-1}\right)\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$; $x\in\mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K.

Bestimmen Sie alle Tangenten von $P\left(0\,\middle|\,-\frac{4}{\mathrm{e}^2-1}\right)$ an K.

Aufgabe 4

f ist eine Funktion mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$. K ist der Graph von f.

Zeigen Sie, dass sich die Tangenten von $P(0\,|\,-1)$ an K im rechten Winkel schneiden.

Aufgabe 5

h ist eine Funktion mit $h(x)=\frac{1}{2}(x^2-9)$, $x\in\mathbb{R}$. K ist der Graph von h. Für welche Werte von y_p geht keine Tangente von K durch den Punkt $P(0\,|\,y_p)$?

Aufgabe 6

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=x+\mathrm{e}^x$; $x\in\mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K.
Geben Sie alle Punkte an, von denen es nur eine Tangente an K gibt.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

Bestimme die Berührstellen der Tangenten durch P an K:

$f'(x)=2x+2$

$-3=f'(u)(0-u)+f(u)=(2u+2)(-u)+u^2+2u-3=-2u^2-2u+u^2+2u-3=-u^2-3 \Rightarrow u=0$.

Es gibt eine Lösung für $u \Rightarrow$ es existiert eine Tangente an K, die durch P geht.

Lösung zu Aufgabe 2

Bestimme die Tangenten von P an K:

$$f(x)=\sqrt{(x)}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$0=f'(u)(-1-u)+f(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}(-1-u)+\sqrt{u}=-\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{\sqrt{u}}{2}+\sqrt{u}=-\frac{1}{2\sqrt{u}}+\frac{\sqrt{u}}{2}=-\frac{1}{2\sqrt{u}}(1-u)$$

nach dem Satz des Nullprodukts ist $1-u=0 \Rightarrow u=1$

Damit ist die Gleichung der Tangente:

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

Lösung zu Aufgabe 3

Bestimme die Berührstellen der Tangenten von P an K:

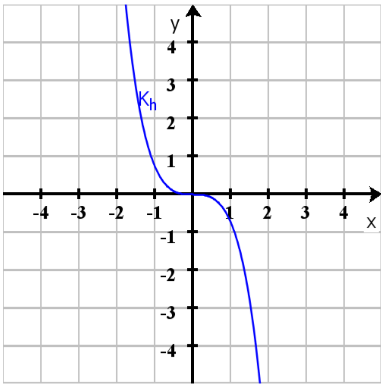
$$f'(x)=\left(\frac{2e}{e^2-1}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)$$

$$\begin{aligned}-\frac{4}{e^2-1}=f'(u)(0-u)+f(u)&=\left(\frac{2e}{e^2-1}\right)\left(e^u+e^{-u}\right)(-u)+\left(\frac{2e}{e^2-1}\right)\left(e^u-e^{-u}\right)\\&=\left(\frac{2e}{e^2-1}\right)\left(-u\,e^u-u\,e^{-u}+e^u-e^{-u}\right)\\&=\left(\frac{2e}{e^2-1}\right)\left(e^u(1-u)-e^{-u}(1+u)\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{4}{e^2-1}\right)\left(\frac{e^2-1}{2e}\right)=e^u(1-u)-\frac{1+u}{e^u}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{e}=e^u(1-u)-\frac{1+u}{e^u}$$

Betrachte den Graphen der Funktion $h(u)=e^u(1-u)-\frac{1+u}{e^u}$



Offensichtlich ist der Graph streng monoton fallend (kann mit Hilfe der ersten Ableitung überprüft werden).

$$h'(u)=e^u(1-u)+e^u(-1)-\left(e^{-u}-(1+u)e^{-u}\right)=-u\,e^u+u\,e^{-u}=u\,e^u\left(\frac{1}{e^{2u}}-1\right)$$

$$u>0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{e^{2u}}<1 \;\Rightarrow\; h'(u)<0$$

$$u=0 \;\Rightarrow\; h'(u)=0$$

$$u<0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{e^{2u}}>0 \;\Rightarrow\; h'(u)<0$$

Das bedeutet, dass die Gleichung nur eine Lösung besitzt. Bei der Betrachtung der Gleichung fällt auf, dass $u=1$ die gesuchte Lösung ist.

Damit gibt es eine Tangente mit der Gleichung:

$$t:\; y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{2\left(\left(e^2+1\right)x-2\right)}{e^2-1}$$

Lösung zu Aufgabe 4

Bestimme die Berührstellen der Tangenten von P an K:

$$f'(x)=x$$

$$-1=f'(u)(0-u)+f(u)=u\cdot(-u)+\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}=-u^2+\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; -\frac{1}{2}=\frac{u^2}{2} \;\Rightarrow\; u^2=1 \;\Rightarrow u=1 \;\vee\; u=-1$$

Bestimme die Tangentengleichungen

$$t_1: y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1$$

$$t_2: y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=-x-1$$

Es ist $m_{t_1}=-\frac{1}{m_{t_2}}$ damit stehen die beiden Tangenten senkrecht aufeinander.

Lösung zu Aufgabe 5

Bestimme die Berührstellen der Tangenten von P an K:

$$h'(x)=x$$

$$y_p = h'(u)(0-u) + h(u) = u \cdot (-u) + \frac{u^2}{2} - \frac{9}{2} = -u^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{u^2}{2} - \frac{9}{2}$$
$$\Rightarrow\ 2y_p + 9 = -u^2\ \Rightarrow\ u^2 = -2y_p - 9\ \Rightarrow\ u = \pm\sqrt{-2y_p - 9}$$

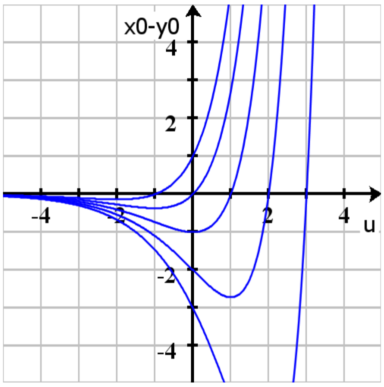
Wenn $-2y_p < 9\ \Rightarrow\ y_p > \frac{9}{2}$, dann gibt es keine Berührstelle und damit keine Tangente von K, die durch den Punkt P geht.

Lösung zu Aufgabe 6

Bestimme die Tangenten vom Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ an K:

$$y_0 = f'(u)(x_0 - u) + f(u)\ \Rightarrow\ (u - x_0 - 1)\mathrm{e}^u = x_0 - y_0$$

Betrachte den Graphen von $h_{x_0}(u) = (u - x_0 - 1)\mathrm{e}^u$



Aus dem Graphen ist ersichtlich, dass die Gleichung $(u - x_0 - 1)\mathrm{e}^u = x_0 - y_0$ genau dann nur eine Lösung für u besitzt, wenn $x_0 - y_0 \geq 0\ \Rightarrow\ x_0 \geq y_0$ oder $T(x_0|y_0)$ Tiefpunkt des Graphen ist. $h'_{x_0}(u) = 0\ \Rightarrow\ u = x_0\ \Rightarrow\ h_{x0}(x_0) = -\mathrm{e}^{x_0} = x_0 - y_0\ \Rightarrow\ y_0 = x_0 + \mathrm{e}^{x_0}$.

Damit gibt es für die Punkte $P \in \left\{(x \mid y) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R},\ x \geq y \vee y = x + \mathrm{e}^x\right\}$ nur eine Tangente an K.