Aufgaben zu Tangenten

Aufgabe 1

h ist eine Funktion mit $h(x)=-(x^2-x)e^x$, $x\in\mathbb{R}$ und K_h der Graph von h.

K_h und der Graph von $h'(x)$ schneiden sich in einem Punkt S. Berechnen Sie den exakten Flächeninhalt des Dreiecks, dass von der Tangente an K_h im Punkt S und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

Aufgabe 2

f ist eine Funktion mit $f(x)=2\sin(\pi x)$, $x\in[-0{,}5;\ 1{,}5]$ und K_f der Graph von f.

t_1 ist eine Tangente an K_f mit der Steigung $m=2\pi$ und t_2 ist ebenfalls eine Tangente an K_f mit der Steigung $m=-2\pi$. t_1, t_2 und die waagerechten Tangenten an K_f schließen ein Trapez ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapez.

Aufgabe 3

Eine Funktion f ist gegeben durch $f(x)=\frac{1}{2}\left(7x^3-32x^2+45x-16\right)$, $x\in\mathbb{R}$. K_f ist der Graph von f. t_1 ist die Tangente an der Stelle $x=1$ an K_f und t_2 ist die Tangente an der Stelle $x=2$ an K_f. Berechnen Sie den Schnittpunkt S von t_1 und t_2.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x)=(x-3)e^{\frac{x}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$. K_h ist der zu h zugehörige Graph. Die Koordinatenachsen und die Tangente an K_h an der Stelle $x=-1$ schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks. Bestimmen Sie alle waagerechten Tangenten.

Aufgabe 5

f ist eine Funktion mit $f(x)=\sin(x)+2x$, $x\in\mathbb{R}$. K_f ist der Graph zu f. Zeigen Sie, dass alle Tangenten an K_f positive Steigung haben.

Aufgabe 6

f ist eine Funktion mit $f(x)=\frac{1}{4}\left(x^3-3x^2-x+7\right)$, $x\in\mathbb{R}$. K_f ist der Graph von f. Die Tangente mit der Steigung $m=-1$ an K_f schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 7

f ist eine Funktion mit $f(x)=e^{x-2}-1$, $x\in\mathbb{R}$. K_f ist der Graph von f. Zeigen Sie, dass K_f und der Graph K_h von $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$, $x\in\mathbb{R}$ mindestens eine gemeinsame Tangente besitzen. Bestimmen Sie eine Tangentengleichung.

Lösungen

zu Aufgabe 1: $A=\frac{\sqrt{e}}{32}$ FE

zu Aufgabe 2: $A=4$ FE

zu Aufgabe 3: $S=(-2|-1)$

zu Aufgabe 4: $A=\frac{25}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ FE $(\approx 7{,}5816\text{FE})$, $t_2:\ y=-2e^{\frac{1}{2}}$

zu Aufgabe 7: $t:\ y=x-2$

Ausführliche Lösungen (mit Lösungsweg):

https://www.henriks-mathewerkstatt.de/1398.Tangenten01.Aufgaben.BG.pdf

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

$h'(x) = -(x^2 + x - 1)e^x$

Schnittstelle berechnen:

$$h(x) = h'(x) \Rightarrow -x^2 + x = -x^2 - x + 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Tangentengleichung an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ bestimmen:

$$t:\ y = h'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4}x + \frac{\sqrt{e}}{8}$$

Schnittpunkte von t mit den Koordinatenachsen berechnen:

$$S_y = \left(0 \middle| \frac{\sqrt{e}}{8}\right)$$

$$\frac{\sqrt{e}}{4}x + \frac{\sqrt{e}}{8} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{e}}{4}x = -\frac{\sqrt{e}}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_x = \left(-\frac{1}{2} \middle| 0\right)$$

Der Flächeninhalt ist damit:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{e}}{8} = \frac{\sqrt{e}}{32}\ \text{FE}$$

Lösung zu Aufgabe 2

$f'(x) = 2\pi\cos(\pi x)$

Suche die Stellen mit der Steigung $m = 2\pi$:

Suche die Stellen mit der Steigung $m = -2\pi$:

$$f'(x) = -2\pi \Rightarrow 2\pi\cos(\pi x) = -2\pi \Rightarrow \cos(\pi x) = -1 \Rightarrow \pi x = \pi \Rightarrow x = 1$$

Suche Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\pi\cos(\pi x) = 0 \Rightarrow \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow \pi x = -\frac{\pi}{2} \vee \pi x = \frac{\pi}{2} \vee \pi x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$

Bestimme die Tangentengleichungen

$t_1:\ y = 2\pi \cdot x + f(0) = 2\pi \cdot x$

$t_2:\ y = -2\pi(x-1) + f(1) = -2\pi x + 2\pi$

waagerechte Tangenten:

$$t_{w1}:\ y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$t_{w2}:\ y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

Schnittstellen berechnen:

$t_1 \cap t_{w1}$: $2\pi x = 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{\pi}$

$t_1 \cap t_{w2}$: $2\pi x = -2 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{\pi}$

$t_2 \cap t_{w1}$: $-2\pi x + 2\pi = 2 \;\Rightarrow\; x = 1 - \frac{1}{\pi}$

$t_2 \cap t_{w2}$: $-2\pi x + 2\pi = -2 \;\Rightarrow\; x = 1 + \frac{1}{\pi}$

Flächeninhalt des Trapez:

$$A = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right) + \left(1 + \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right)\right)\right) \cdot 4 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi} + 1 + \frac{2}{\pi}\right) \cdot 4 = 4\,\text{FE}$$

Lösung zu Aufgabe 3

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(21x^2 - 64x + 45\right)$$

Tangentengleichungen aufstellen:

t_1: $y = f'(1)(x-1) + f(1) = (x-1) + 2 = x + 1$

t_2: $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{1}{2}(x-2) + 1 = \frac{x}{2}$

Schnittpunkt von t_1 und t_2 berechnen:

$$\begin{aligned} x+1 &= \frac{x}{2} && |\cdot 2 \\ 2x+2 &= x && |-x-2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

in die Gleichung von t_1 einsetzen:

$y = -2 + 1 = -1$

Damit hat der Schnittpunkt S die Koordinaten:

$S = (-2|-1)$

Lösung zu Aufgabe 4

$$h'(x) = e^{\frac{x}{2}} + (x-3)\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(x-1)e^{\frac{x}{2}}$$

Tangentengleichung an der Stelle $x = -1$ bestimmen:

$$t_1:\; y = h'(-1)(x+1) + h(-1) = -e^{-\frac{1}{2}}(x+1) - 4e^{-\frac{1}{2}} = -e^{-\frac{1}{2}}x - 5e^{-\frac{1}{2}}$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$S_y = \left(0 \middle| -5e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$-e^{-\frac{1}{2}}x - 5e^{-\frac{1}{2}} = 0 \;\Rightarrow\; x = -5 \;\Rightarrow\; S_x = (-5|0)$$

Flächeninhalt des Dreiecks berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5e^{-\frac{1}{2}} \cdot 5e^{-\frac{1}{2}} = \frac{25}{2}e^{-\frac{1}{2}}\,\text{FE} \qquad (\approx 7{,}5816\,\text{FE})$$

Tangentengleichungen von waagerechten Tangenten bestimmen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}(x-1)e^{\frac{x}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

$$h'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(x-1)e^{\frac{x}{2}}=0 \;\underset{\text{nach dem Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow}\; x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1$$

$$t_2\colon\; y=h(1)=-2e^{\frac{1}{2}}$$

Lösung zu Aufgabe 5

$f'(x)=\underbrace{\cos(x)}_{\geq -1}+2\geq 1$, das bedeutet, dass K_f an jeder Stelle eine positive Steigung hat und damit haben auch alle Tangenten an K_f eine positive Steigung.

Lösung zu Aufgabe 6

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(3x^2-6x-1\right)$$

Bestimme die Tangenten mit der Steigung $m=-1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(3x^2-6x-1\right) &= -1 && |\cdot 4 \\ 3x^2-6x-1 &= -4 && |+4 \\ 3x^2-6x+3 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=3,\; b=-6,\; c=3$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} \\ &= \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{6} \\ &= \frac{6\pm\sqrt{0}}{6} \\ &= \frac{6\pm 0}{6} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Tangentengleichung aufstellen

$$t\colon\; y=-1(x-1)+f(1)=-1(x-1)+1=-x+2$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ermitteln:

$$S_y=(0|2)$$

$$-x+2=0 \;\Rightarrow\; x=2 \;\Rightarrow\; S_x=(2|0)$$

Daraus ergibt sich, dass die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks jeweils die Länge 2 LE haben und damit ist das Dreieck gleichschenklig.

Lösung zu Aufgabe 7

$f'(x)=\mathrm{e}^{x-2} \wedge h'(x)=-x+3$

Suche Stellen, an denen K_f und K_h die gleiche Steigung besitzen:

$f'(x)=h'(x) \Rightarrow \mathrm{e}^{x-2}=-x+3$

Wähle $x=2 \Rightarrow \mathrm{e}^{2-2}=1=-2+3$

Prüfe, ob K_f und K_h an der Stelle $x=2$ einen gemeinsamen Kurvenpunkt besitzen:

$f(2)=\mathrm{e}^{2-2}-1=0=-\frac{1}{2}\cdot 4+3\cdot 2-4=h(2)$

Tangente an der Stelle $x=2$:

t: $y=h'(2)(x-2)+h(2)=x-2$