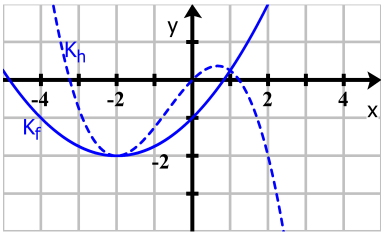
Berühren und senkrecht schneiden (Aufgaben)

Aufgabe 1



Das nebenstehende Schaubild zeigt die Graphen K_f und K_h der Funktionen $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x-1$ und $h(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$. Zeigen Sie, dass K_f und K_h zwei gemeinsame Punkte haben und nur einer von ihnen ein Berührpunkt ist.

<u>Lösung:</u>

Bestimme die Schnittpunkte von K_f und K_h :

Setze $f(x)=h(x) \underset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x_1=-2$ und $x_2=1$ damit haben K_f und K_h zwei gemeinsame Punkte.

Zeige, dass nur einer von beiden ein Berührpunkt ist:

Bilde von beiden Funktionen die 1. Ableitung:

$f'(x)=\frac{1}{2}x+1$ und $h'(x)=-\frac{3}{4}x^2-x+1$

Setze $x_1=-2$ und $x_2=1$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$$\left.\begin{array}{r} f'(-2)=0 \\ h'(-2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Beührpunkt an der Stelle } x_1=-2$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(1)=\frac{3}{2} \\ h'(1)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ kein Beührpunkt an der Stelle } x_2=1$$

Aufgabe 2

Wo berühren sich die Graphen von f und h ?

$f(x)=\frac{2}{x^2}$ und $h(x)=-\frac{1}{8}x^2+1$

<u>Lösung:</u>

Suche die Stellen, an denen die Graphen von f und h gemeinsame Punkte haben:

Setze $f(x)=h(x) \underset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x_1=-2$ und $x_2=2$

Prüfe, ob beide Graphen an $x_1=-2$ und $x_2=2$ jeweils die gleiche Steigung haben. Bilde dazu die 1. Ableitung von f und h :

$f'(x)=-\frac{4}{x^3}$ und $h'(x)=-\frac{1}{4}x$

Setze $x_1=-2$ und $x_2=2$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$$\left.\begin{array}{r} f'(-2)=\frac{1}{2} \\ h'(-2)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Beührpunkt an der Stelle } x_1=-2$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(2)=-\frac{1}{2} \\ h'(-2)=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Beührpunkt an der Stelle } x_2=2$$

Aufgabe 3

Sei K_f der Graph von f und K_h de Graph von h. Zeigen Sie, dass die Kurve K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f liegt (Lage der Kurven zueinander).

$f(x)=2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ und $h(x)=\frac{\pi}{2}\left(x^2-4x+3\right)+2$

<u>Lösung:</u>

Wenn K_h oberhalb von K_f liegt, dann dürfen sich K_h und K_f nicht schneiden:

Prüfe auf gemeinsame Kurvenpunkte:

Setze $f(x)=h(x) \underset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x_1=1$ und $x_2=3$

Prüfe, ob $x_1=1$ oder $x_2=3$ Berührpunkte (d.h. keine echten Schnittpunkte) sind:

Bilde von f und h die 1. Ableitung:

$f'(x)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ und $h'(x)=\pi x-2\pi$

Setze $x_1=1$ und $x_2=3$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$\left.\begin{matrix} f'(1)=-\pi \\ h'(1)=-\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Berührpunkt an der Stelle $x_1=1$

$\left.\begin{matrix} f'(3)=\pi \\ h'(3)=\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Berührpunkt an der Stelle $x_2=3$

Daraus folgt, das eine der beiden Kurven für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der anderen Kurve liegt. Prüfe, ob K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f liegt:

Wähle für die Prüfung eine beliebige Stelle ungleich der Berührstellen: $x=0$

$f(2)=0<2-\frac{\pi}{2}=h(2)$

Somit liegt die Kurve K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und c so, dass sich die Kurven von f und h an der Stelle $x=1$ berühren.

$f(x)=a\,e^{x-1}-x+c \quad (a, c \in \mathbb{R})$ und $h(x)=-\frac{1}{9}\left(2x^2-13x-7\right)$

<u>Lösung:</u>

Sei K_f die Kurve von f und K_h die Kurve von h. Wenn sich K_f und K_h an der Stelle $x=1$ berühren, dann muss gelten:

1. K_f und K_h haben an der Stelle $x=1$ die gleiche Steigung.
2. K_f und K_h haben an der Stelle $x=1$ einen gemeinsamen Kurvenpunkt.

Bestimme die Steigung von K_f an der Stelle $x=1$ mit Hilfe der 1. Ableitung von h:

$h'(x)=-\frac{1}{9}(4x-13)$, $h'(1)=1$

Die 1. Ableitung von f ist $f'(x)=a\,e^{x-1}-1$. Es gilt $f'(1)=1 \underset{\text{CAS}}{\Rightarrow} a=2$.

Gemeinsamer Kurvenpunkt an der Stelle $x=1$: $h(1)=2 \Rightarrow f(1)=2$:

$f(1)=2e^0-1+c=2 \underset{\text{CAS}}{\Rightarrow} c=1$

Damit ist $f(x)=a\,e^{x-1}-x+1$.