Tangenten von einem Punkt an eine Kurve

Aufgabe 1

Sei $f_t(x)=(x+3)(x-t)$, $x,t\in\mathbb{R}$ eine Funktion und K_t der Graph von f_t.

Wie viele Tangenten an K_t gibt es, die durch den Punkt $P(0|-3)$ gehen?

Aufgabe 2

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=x+\mathrm{e}^x$; $x\in\mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K.

Geben Sie alle Punkte an, von denen es nur eine Tangente an K gibt.

Aufgabe 3

Für $b\in\mathbb{R}^*$ ist die Funktion h_b gegeben mit $h_b(x)=b(x^2-9)$, $x\in\mathbb{R}$. K_b ist das Schaubild von h_b.

Bestimmen Sie b so, dass durch $P(0|-9)$ eine Tangente an K_b mit der Steigung $m=3$ geht.

Aufgabe 4

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=\sqrt{x}$; $x\in\mathbb{R}_+$. Ihr Schaubild ist K.

Bestimmen Sie alle Tangenten von $P(-1|0)$ an K.

Aufgabe 5

Für $t\in\mathbb{R}^*$ ist die Funktion f_t gegeben mit $f_t(x)=tx^2-t$, $x\in\mathbb{R}$. K_t ist der Graph von f_t.

Bestimmen Sie einen Wert für t, so dass sich die Tangenten von $P(0|-1)$ an K_t im rechten Winkel schneiden.

Aufgabe 6

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=\left(\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2-1}\right)\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$; $x\in\mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K.

Bestimmen Sie alle Tangenten von $P\left(0\,\middle|\,-\frac{4}{\mathrm{e}^2-1}\right)$ an K.

Lösungen

zu Aufgabe 1: $t<4$: 2 Tangeneten; $t=4$: eine Tangente; $t>4$: keine Tangente

zu Aufgabe 2: $P\in\{(x\,|\,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},\ x\geq y\}$

zu Aufgabe 3: $b=\frac{1}{2}$

zu Aufgabe 4: t: $y=\frac{1}{2}(x+1)$

zu Aufgabe 5: $t=\frac{1}{2}$

zu Aufgabe 6; t: $y=\frac{2\left(\left(\mathrm{e}^2+1\right)x-2\right)}{\mathrm{e}^2-1}$

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

Bestimme die Berührstellen der Tangenten durch P an K_t:

$-3=f_t'(u)(0-u)+f_t(u) \Rightarrow u=\pm\sqrt{-3(t-1)}$

Fall $t<1$: Es existieren zwei Tangenten an K_t, die durch P gehen.

Fall $t=1$: Es existiert eine Tangente an K_t, die durch P geht.

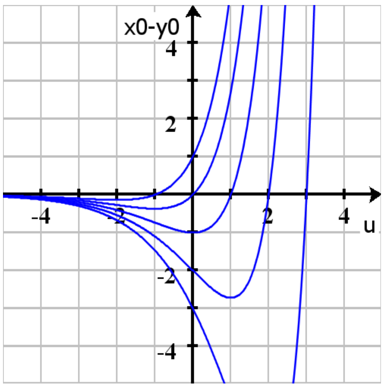
Fall $t>1$: Es existieren keine Tangente an K_t, die durch P geht.

Lösung zu Aufgabe 2

Bestimme die Tangenten vom Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ an K:

$y_0=f'(u)(x_0-u)+f(u) \Rightarrow (u-x_0-1)\mathrm{e}^u=x_0-y_0$

Betrachte den Graphen von $h_{x_0}(u)=(u-x_0-1)\mathrm{e}^u$



Aus dem Graphen ist ersichtlich, dass die Gleichung $(u-x_0-1)\mathrm{e}^u=x_0-y_0$ genau dann nur eine Lösung für u besitzt, wenn $x_0-y_0\geq 0 \Rightarrow x_0\geq y_0$ oder $T(x_0|y_0)$ Tiefpunkt des Graphen ist. $h'_{x_0}(u)=0 \Rightarrow u=x_0 \Rightarrow h_{x0}(x_0)=-\mathrm{e}^{x_0}=x_0-y_0 \Rightarrow y_0=x_0+\mathrm{e}^{x_0}$.

Damit gibt es für die Punkte $P\in\left\{(x \mid y) \,\middle|\, x,y\in\mathbb{R},\ x\geq y \vee y=x+\mathrm{e}^x\right\}$ nur eine Tangente an K.

Lösung zu Aufgabe 3

Bestimme die Tangenten von P an K_b:

$-9=h_b'(u)(0-u)+h_b(u) \Rightarrow u=\pm 3\sqrt{\frac{1}{b}-1}$

Gesucht ist eine Tangente mit der Steigung $m=3 \Rightarrow h_b'\left(3\sqrt{\frac{1}{b}-1}\right)=3 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

Lösung zu Aufgabe 4

Bestimmte die Berührstellen der Tangenten von P an K:

$$0=f\,'(u)(-1-u)+f(u) \;\Rightarrow\; u=1$$

Damit gibt es eine Tangente mit der Gleichung:

$$t\colon\; y=f\,'(1)(x-1)+f(1)=\frac{1}{2}(x+1)$$

Lösung zu Aufgabe 5

Bestimme die Berührstellen der Tangenten von P an K_t:

$$-1=f_t\,'(u)(0-u)+f_t(u) \;\Rightarrow\; u=\pm\sqrt{\frac{1}{t}-1}$$

Wenn sich die Tangenten in P im rechten Winkel schneiden sollen, dann muss

$$f_t\,'\left(\sqrt{\frac{1}{t}-1}\right)=-\frac{1}{f_t\,'\left(-\sqrt{\frac{1}{t}-1}\right)} \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{2}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 6

Bestimme die Berührstellen der Tangenten von P an K:

$$-\frac{4}{\mathrm{e}^2-1}=f\,'(u)(0-u)+f(u) \;\Rightarrow\; u=1$$

Damit gibt es eine Tangente mit der Gleichung:

$$t\colon\; y=f\,'(1)(x-1)+f(1)=\frac{2\left(\left(\mathrm{e}^2+1\right)x-2\right)}{\mathrm{e}^2-1}$$